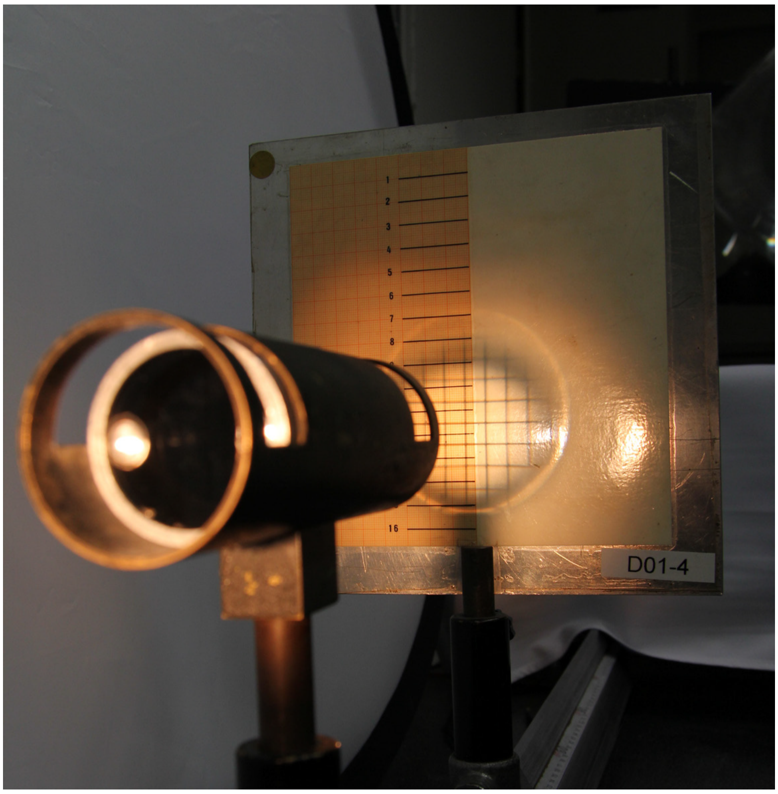
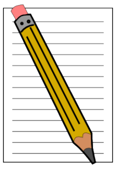


Linsen und Linsensysteme

Sie werden hier die Brennweiten von Linsen und Linsensystemen bestimmen und dabei lernen, wie Brillen, Teleobjektive und andere optische Geräte funktionieren.
Sie werden feststellen, dass bei diesem Versuch Unsicherheiten auftreten, wann ein Bild wirklich scharf ist. Dementsprechend messen Sie unterschiedliche Weiten g und b, auch wenn Sie die immer dieselbe Linse verwenden. *Keine* physikalische Messung ist jemals zu 100% exakt! Mithilfe der Fehlerrechnung gelangen Sie in dieser Situation jedoch zu erstaunlich guten Ergebnissen.

Schriftliche VORbereitung:



(V1) Worin unterscheiden sich Konvex- und Konkavlinsen?

(V2) Beweisen Sie die Abbildungsgleichung (1) mit den Strahlensätzen.

(V3) In welcher Gegenstandsweite g muss der Gegenstand bei einer Konvexlinse aufgestellt werden, damit gilt: $G < B$, $G = B$, $G > B$. Wie groß ist jeweils die Bildweite b?

(V4) Konstruieren Sie maßstabsgetreu das Bild eines Gegenstandes ($G = 1\,\text{cm}$) für eine Konvexlinse $f = 3\,\text{cm}$ und Gegenstandsweiten $g_1 = 4\,\text{cm}$ und $g_2 = 2\,\text{cm}$. Berechnen Sie die Bildgrößen und Bildweiten in den Fällen.

(V5) Beschreiben Sie den Begriff virtuelles Bild am Beispiel einer Lupe.

1 Dünne Linsen

1.1 Die Linsengleichungen

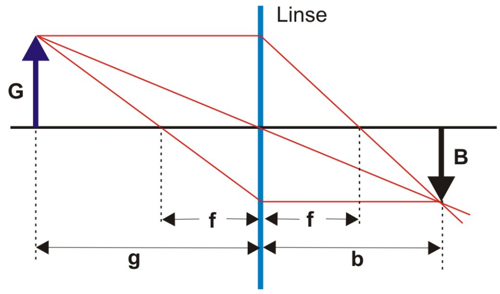


Abb. 1: Strahlengang bei dünnen Linsen

Bei dünnen Linsen kann man die Brechung an den beiden Linsenoberflächen durch eine einzige an der Linsenmitte ersetzen. Das Bild eines Gegenstandes lässt sich stets mit den drei ausgezeichneten Strahlen konstruieren: *Parallel-, Mittelpunkt- und Brennpunktstrahl.*
Mit dem Strahlensatz zeigen Sie

$$\text{die Abbildungsgleichung } \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \text{ und den Abbildungsmaßstab } \gamma = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}. \tag{1}$$

1.2 Einfache Messung der Brennweite einer Konvexlinse

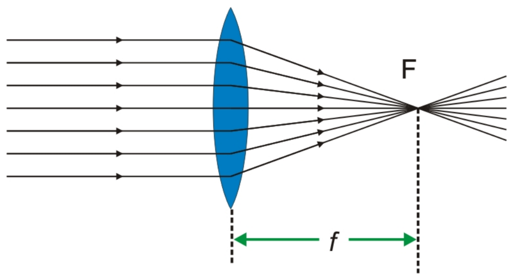


Abb. 2: Der schnelle Weg zur Brennweite

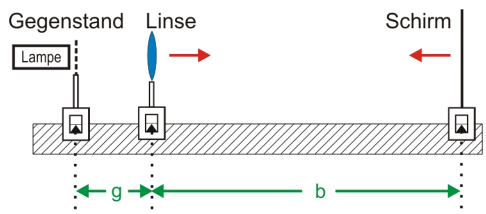


Abb. 3: Linse und Schirm müssen verschoben werden

(M1) Der schnellste Weg, die Brennweite einer Konvexlinse zu bestimmen, geschieht ohne die Schiene. Sie bilden dazu einen möglichst weit entfernten Gegenstand ab (paralleles Lichtbündel) und messen dann direkt die Brennweite $f \approx b$. Ermitteln Sie so zunächst die ungefähren Brennweiten der drei Konvexlinsen am Arbeitsplatz (im Halter).

(M2) Genauer gelingt die Bestimmung der Brennweite in einer Messreihe. Bilden Sie dazu einen Gegenstand (im Versuch ist das ein Dia mit einem Kreuzgitter) mit einer der Konvexlinsen auf den Schirm für 6 verschiedene Abstände g scharf ab (Abbildung 3). Messen Sie jeweils g und b.

(A1) Berechnen Sie die Brennweite f mit der Abbildungsgleichung (1) als Mittelwert mit Angabe der Messunsicherheit (das ist die Messabweichung vom Mittelwert).

(A2) Stellen Sie Ihre Messwerte wie in Abbildung 4 grafisch dar. Tragen Sie dazu die gemessenen b-Werte auf der Ordinate auf, die g-Werte auf der Abszisse und verbinden Sie zusammengehörige Punkte durch eine Gerade. Die Koordinaten des gemeinsamen Schnittpunkts sind gleich der Brennweite.

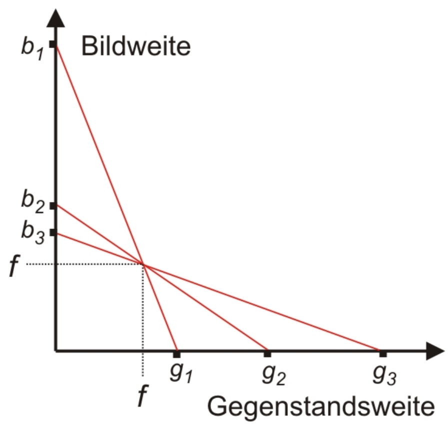


Abb. 4: Aus dieser Darstellung liest man ab: $(g-f) : f = f : (b-f) = g : b$. Das lässt sich in die Abbildungsgleichung (1) umformen

1.3 Messung der Brennweite mit dem Besselverfahren

Ein systematischer Fehler ist dadurch bedingt, dass man die Linsenmitte auf der optischen Schiene nie genau feststellen kann. Man kann diesen Fehler mit dem Besselverfahren (Abbildung 5) vermeiden: Gegenstand und Schirm bleiben bei diesem Verfahren fest stehen (Abstand e) und man erzeugt zunächst in Position I ein vergrößertes Bild (B_I) und dann durch Verschieben der Linse um d in der Position II ein verkleinertes (B_{II}). Da nach der Abbildungsgleichung $g_I = b_{II}$ und $b_I = g_{II}$ gilt, erhält man hier die Brennweite aus:

$$\left.\begin{array}{l} b+g=e \\ b-g=d \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} b=\dfrac{e+d}{2} \\ g=\dfrac{e-d}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{1}{f}=\frac{4e}{e^2-d^2} \qquad (2)$$

Benutzen Sie für den folgenden Versuchsteil bitte dieselbe Konvexlinse wie in 1.2. Der Versuch gelingt nur für einen festen Abstand $e > 4f$.

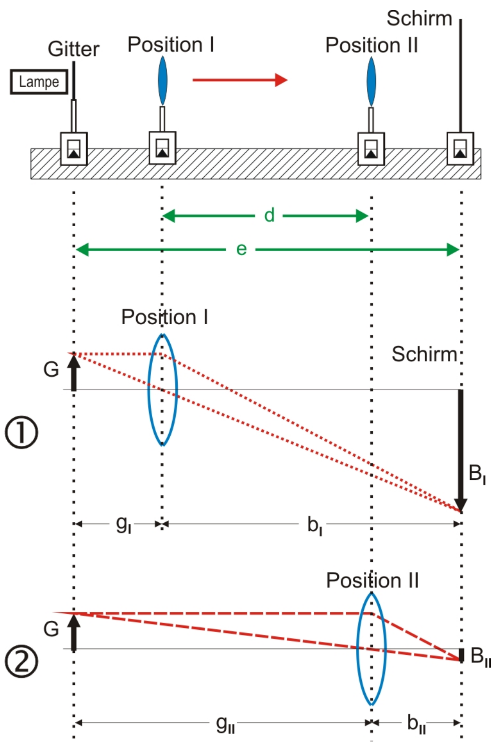


Abb. 5: *Zum Besselverfahren*: Gemessen wird nur der feste Abstand e und die Verschiebung d der Linse an einer beliebigen Kante des optischen Reiters. Die tatsächliche Lage der Linse muss man nicht bestimmen

(M3) Erzeugen Sie die beiden scharfen Bilder (Position 1 und Position 2) und messen Sie die Verschiebung d, jede*r von Ihnen dreimal – für die Mittelwertbildung.

(M4) Messen Sie den festen Abstand e. Hier wird kein Mittelwert gebildet, da Sie ohne eine Veränderung des Abstandes üblicherweise auch identische Werte messen. Trotzdem ist diese Messung natürlich nicht ohne Unsicherheiten.

(A3) Bestimmen Sie die Brennweite f nach Gleichung 2 mit den Mittelwerten von d und e. Berechnen Sie die Messunsicherheiten.

2 Dicke Linsen oder komplette Linsensysteme

Bei dicken Linsen oder bei System aus mehreren Linsen reicht eine einzige Brechungsebene für die Konstruktion nicht aus. Man kann aber in diesen Fällen die Brechung an allen Linsenoberflächen durch die Brechung an lediglich zwei Brechungsebenen, den Hauptebenen (H_g und H_b in Abbildung 6), ersetzen. Dies sind zwei Ebenen, die sich kongruent ineinander abbilden (und die es bei jedem System gibt). Der tatsächliche Verlauf der Strahlen durch das Linsensystem wird „übergangen“ und gedanklich parallel zwischen den Hauptebenen versetzt.

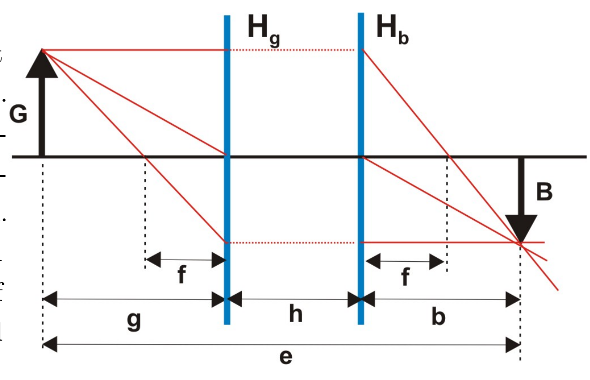


Abb. 6: Abbildungskonstruktion mit Hauptebenen

Die Bildkonstruktion wird dann mit den drei ausgezeichneten Strahlen wie bei dünnen Linsen ausgeführt. Bezieht man g, b und f auf die zugehörige Hauptebene, so gelten auch hier wieder Gleichung 1 und Gleichung 2.

2.1 Die Konstruktion der Hauptebenen

Die Bildkonstruktion mit diesen Hauptebenen ist recht einfach. Etwas aufwändiger ist es, die Lage der Hauptebenen und Brennweiten zu bestimmen.

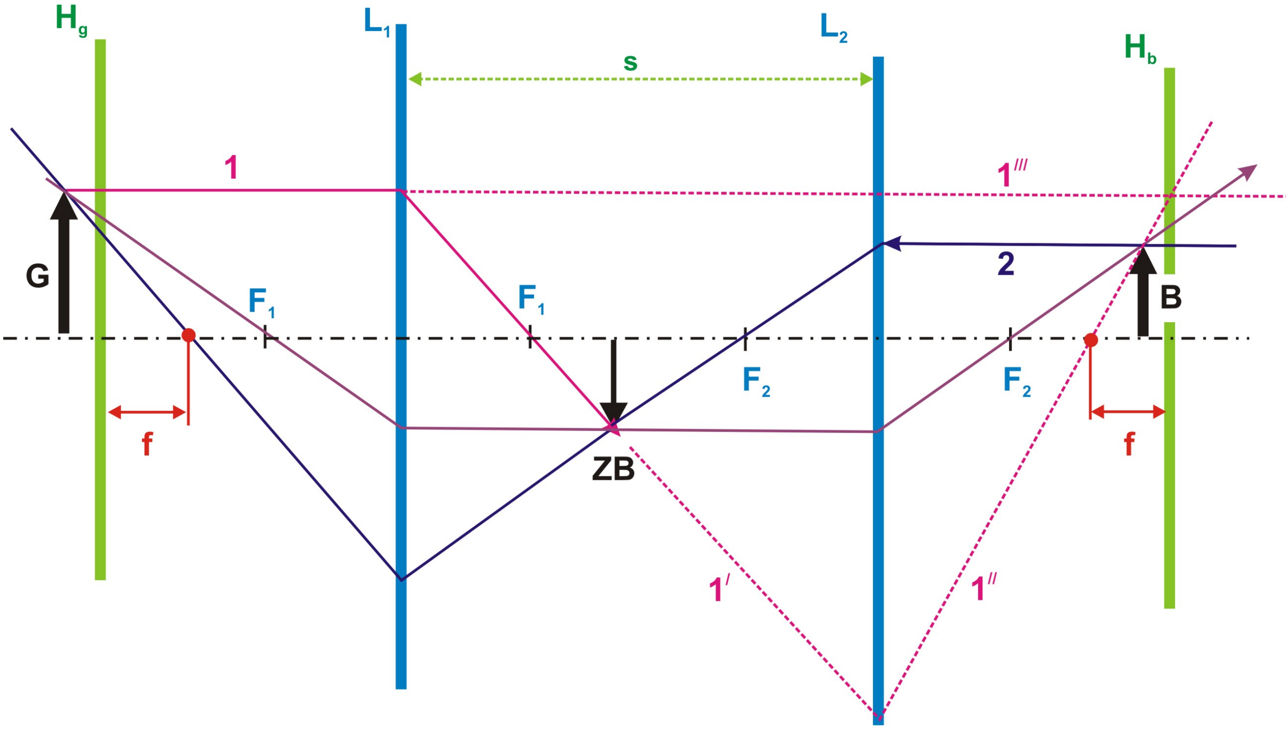


Abb. 7: Konstruktion der Hauptebenen; *Quelle*: Bergmann-Schäfer

Das Verfahren dazu lässt sich anhand von Abbildung 7 verfolgen. Sie sehen die Skizze eines Systems aus zwei Konvexlinsen im Abstand s. Der Gegenstand G wird durch die Linse L_1 in das Zwischenbild ZB abgebildet und dieses mittels L_2 in das Bild B.
Verfolgen Sie den Parallelstrahl 1 von links durch beide Linsen. Sie erhalten die Strahlen $1'$ und $1''$.

- Der Schnittpunkt der Verlängerung des einfallenden Parallelstrahls 1 ($= 1'''$) mit $1''$ bestimmt die Lage der bildseitigen Hauptebene H_b .
- Der Schnittpunkt von $1''$ mit der optischen Achse ist der bildseitige Brennpunkt F des Systems.

Hauptebene H_g und Brennpunkt F auf der Gegenstandsseite erhalten Sie analog, indem Sie den von rechts einfallenden Parallelstrahl 2 verfolgen.

Wenn der Gegenstand G in Abbildung 7 in die Hauptebene H_g verschoben wird, liegt das Bild B in der Hauptebene H_b. Die beiden Hauptebenen bilden sich kongruent ineinander ab. Die Brennweiten des Systems in Abbildung 7 sind, bezogen auf die Hauptebenen, negativ. Im Gegensatz zu einer Konkavlinse erhält man hier aber dennoch ein reelles Bild.

2.2 Berechnung der Brennweiten

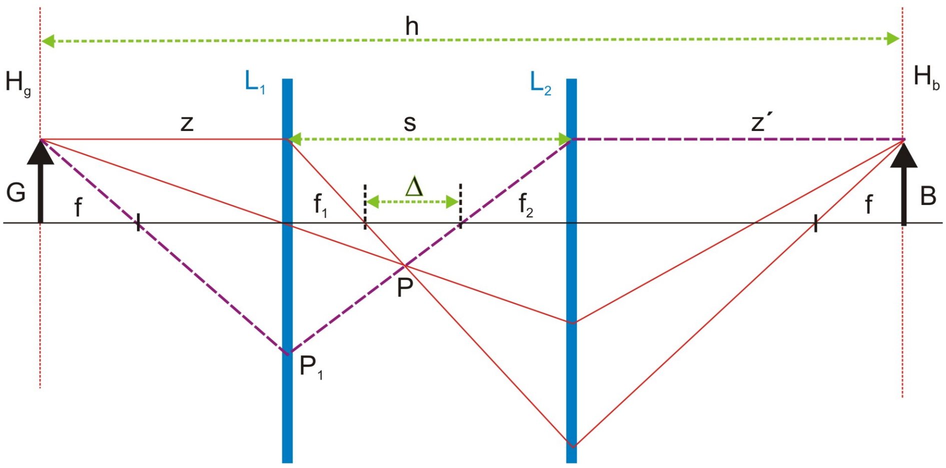


Abb. 8: Zur Berechnung der Brennweiten; *Quelle*: Bergmann-Schäfer

Dieses Vorhaben gelingt bei einem solchen System am einfachsten, wenn man gedanklich den Gegenstand in eine der Hauptebenen legt (Abbildung 8) und ihn mit den Linsen abbildet:

$$\text{Für Strahlen, die von } P \text{ ausgehen, gilt: } \frac{f_1}{z} = \frac{\Delta}{s} = \frac{s}{h} \text{ mit } s = \Delta + f_1 + f_2 \tag{3}$$

$$\text{und für die, die von } P_1 \text{ ausgehen, gilt: } \frac{z-f}{z} = \frac{s-f_2}{s} \tag{4}$$

$$\text{Aus Gleichung 3 folgt } z = \frac{s \cdot f_1}{\Delta} \text{ und } h = \frac{s^2}{\Delta} = \frac{s^2}{s - f_1 - f_2} \tag{5}$$

$$\text{und damit aus Gleichung 4: } f = z \cdot \frac{f_2}{s} = \frac{f_1 f_2}{\Delta} \text{ und schließlich } \frac{1}{f} = \frac{\Delta}{f_1 f_2} = \frac{s}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2}.$$

Übliche Konvention: Brennweiten rechts von H_g bzw. links von H_b zählen negativ. Um dieser Konvention zu folgen, ersetzen Sie nun noch f durch $-f$ und erhalten das Endergebnis:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{s}{f_1 f_2} \tag{6}$$

(A4) Berechnen Sie für das Linsensystem bestehend aus L_1 mit $f_1 = 15\,\text{cm}$ und L_2 mit $f_2 = -10\,\text{cm}$; Abstand $s = 10\,\text{cm}$ mit Gleichung 5 und Gleichung 6 den Abstand h der Hauptebenen sowie die Brennweite f für dieses Linsensystem. Wie weit liegen die Hauptebenen H_g und H_b vor der Linse L_1? Berechnen Sie dazu z mit Gleichung 5 und $z' = h - s - z$.

(A5) Zeichnen Sie mit den Werten aus der vorherigen Aufgabe den Strahlengang für dieses System wie in Abbildung 8 im Maßstab 1 : 5 (A4-quer). Diese Konstruktion hilft Ihnen, das Teleobjektiv in Abschnitt 3 zu verstehen (Abbildung 9). Der Gegenstand kann dabei vor, in oder hinter der Hauptebene H_g liegen.

3 Versuche mit einem Teleobjektiv

Ein Fotoapparat mit einem normalen Objektiv ($f = 50\,\mathrm{mm}$) erzeugt von einem weit entfernten Baum ($g = 1\,\mathrm{km}$, $G = 10\,\mathrm{m}$) nur ein sehr kleines Bild. Man könnte ein größeres Bild erhalten, wenn man als Objektiv eine Linse größerer Brennweite ($f = 200\,\mathrm{mm}$) benutzen würde. Dies hätte aber einen unhandlich langen Vorsatz zur Folge. Man umgeht das Problem mit einem Linsensystem (Teleobjektiv), das folgende Eigenschaften besitzt:

- große Brennweite
- bildseitiger Brennpunkt kurz hinter der letzten Linse.

Als Modell eines solchen Teleobjektivs benutzen Sie im Versuch ein Linsensystem wie in Abbildung 9 mit: $f_1 = 15\,\mathrm{cm}$ für L_1 und $f_2 = -10\,\mathrm{cm}$ für L_2 und Linsenabstand $s > 10\,\mathrm{cm}$.

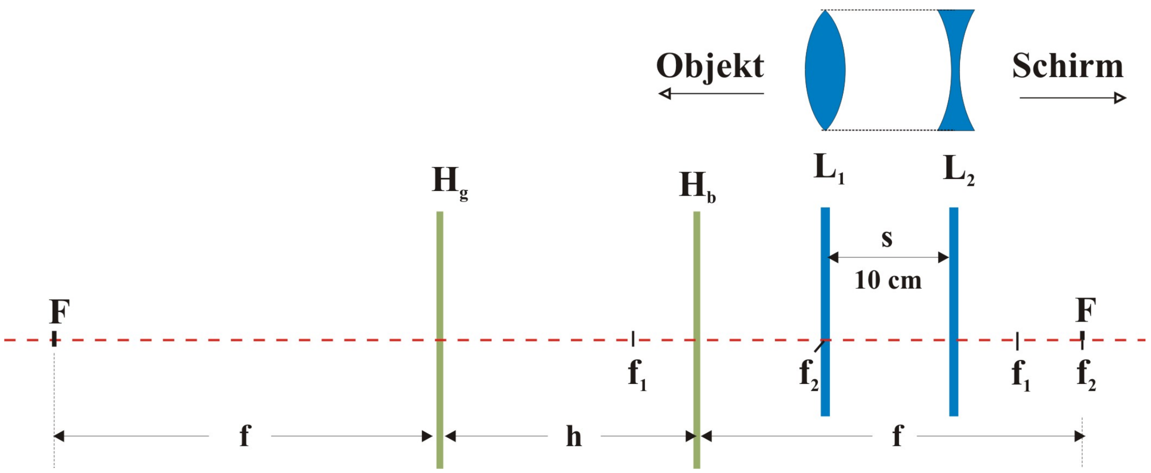


Abb. 9: Teleobjektiv im Versuch: Mit $s = 10\,\mathrm{cm}$ hat dieses Linsensystem eine Brennweite von $30\,\mathrm{cm}$ (doppelt so groß wie f_1).

3.1 Messung der Brennweite des Systems

(M5) Bauen Sie das Teleobjektiv bestehend aus Konvexlinse L_1 mit $f_1 = 15\,\mathrm{cm}$ und Konkavlinse L_2 mit $f_2 = -10\,\mathrm{cm}$ auf. Messen Sie den Abstand s der beiden Linsen. Der Versuch lässt sich leichter durchführen, wenn s etwas mehr als $10\,\mathrm{cm}$ beträgt.

(M6) Stellen Sie den Gegenstand und den Schirm jeweils am Ende der optischen Bank auf. Messen Sie mit dem Besselverfahren bei gleichbleibendem Abstand e wieder 6-mal den Abstand d. Den Abstand e müssen Sie für die Auswertung notieren. Wenn Sie keine zwei Positionen finden, in denen sich eine scharfe Abbildung ergibt müssen Sie ggf. den Abstand zwischen den beiden Linsen etwas vergrößern.

Die Brennweite des Teleobjektivs mit dem Besselverfahren ergibt sich wegen $b + g = e - h$ (vgl. Abbildung 2) hier aus:

$$f = \frac{(e-h)^2 - d^2}{4(e-h)} \tag{7}$$

Um die Brennweite zu berechnen, wird der Abstand h der Hauptebenen benötigt.

3.2 Messung des Abstandes h der Hauptebenen

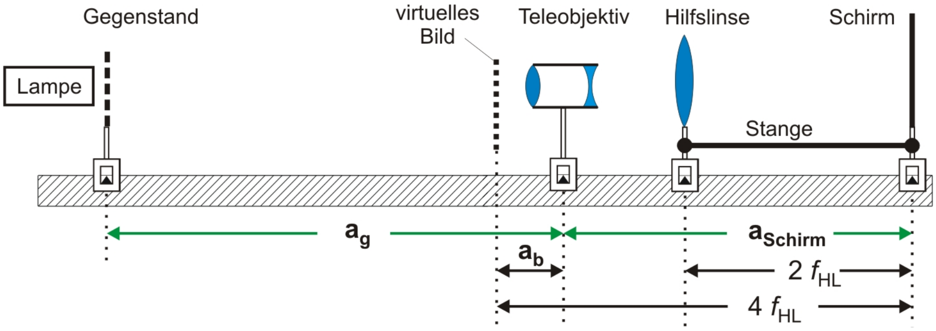


Abb. 10: Da es in der Auswertung nur auf die Differenz $a_g - a_b$ ankommt, können Sie zur Messung von a_g von einer beliebigen Kante des Teleobjektivs ausgehen. Auf die gleiche Kante müssen Sie dann auch die Messung von a_b beziehen.

Beide Hauptebenen bilden sich kongruent aufeinander ab. Nur wenn der Gegenstand genau in der Hauptebene H_g liegt, sind Gegenstand und Bild gleich groß (Abbildung 8). Das liefert die Idee für diese Messung: Für verschiedene Scharf-Stellungen des Bildes bestimmen Sie jeweils den Abbildungsmaßstab $\gamma = \frac{B}{G}$ durch Auszählen der Bildgröße B. Dort wo $\gamma = 1$ ist, muss der Gegenstand in der Hauptebene H_g und das Bild in der Hauptebene H_b liegen.

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 10 dargestellt. Das virtuelle Bild können Sie nicht direkt beobachten. Um dessen Lage, den Abstand a_b, zu bestimmen, benutzen Sie hier eine Hilfslinse der Brennweite $f_{\mathrm{HL}} = 25\,\mathrm{cm}$ (Abbildung 10). Diese Hilfslinse wird mit einer Stange starr an den Schirm im Abstand $2f_{\mathrm{HL}}$ gekoppelt, beide lassen sich dann nur noch gemeinsam verschieben. Damit können Sie das virtuelle Bild als ein größengleiches und reelles Bild auf dem Schirm abbilden und aufsuchen. Der Abstand a_b ergibt sich daher aus: $a_b = 4f_{\mathrm{HL}} - a_{\mathrm{Schirm}} = 100\,\mathrm{cm} - a_{\mathrm{Schirm}}$.

Notieren Sie sich den Abstand s und bestimmen Sie für verschiedene Positionen des Gegenstandes (Abbildung 10) bei feststehendem Teleobjektiv mit den beiden Linsen aus Abbildung 9:

(M7) den Abstand a_g Teleobjektiv zum Gegenstand (5 mm-Raster)

(M8) den Abstand a_{Schirm} Teleobjektiv zum Schirm

(M9) den Abbildungsmaßstab $\gamma = \frac{B}{G}$ durch Auszählen der Bildgröße B auf dem Schirm (mm-Papier).

(M10) Führen Sie je 3 Messungen für $\gamma < 1$ und $\gamma > 1$ durch und messen jeweils (M7), (M8), (M9).

Hinweise zur Durchführung

- Beginnen Sie die erste Messung mit $a_g \approx 45\,\mathrm{cm}$. Notieren Sie a_g, a_{Schirm} und γ. Nähern Sie für die nächsten Messungen die Lampe (Gegenstand) etwas dem weiterhin feststehenden Teleobjektiv und suchen Sie durch Verschieben von Hilfslinse mit Schirm das virtuelle Bild auf.
- Notieren Sie sich zunächst die Positionen von Gegenstand, Teleobjektiv und Schirm und berechnen daraus die gesuchten Abstände.
- Da Sie bei der Auswertung die Position der Hauptebenen aus dem Schnittpunkt der sich ergebenden Kurven mit der Geraden $\gamma = 1$ bestimmen wird die Messung genauer, wenn Sie Messwerte möglichst nahe an $\gamma = 1$ auf beiden Seiten dieser Linie aufnehmen.

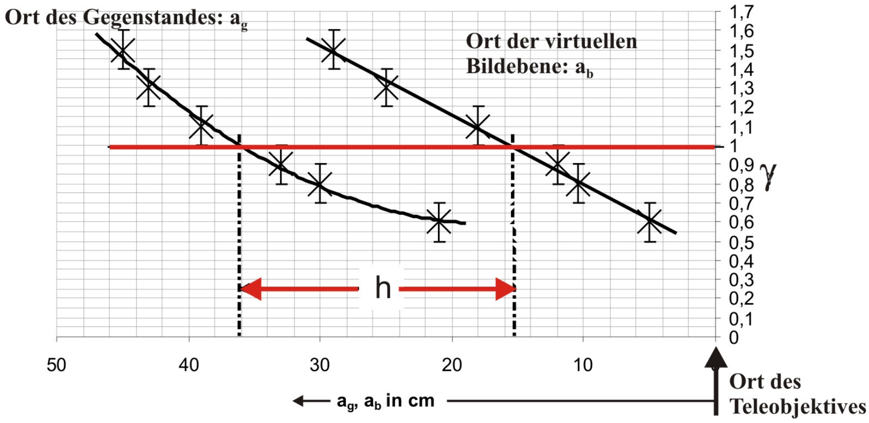


Abb. 11: Der gesuchte Hauptebenenabstand h ergibt sich für $\gamma = 1$ aus $h = a_g - a_b$.

(A6) Tragen Sie den gemessenen Abbildungsmaßstab γ jeweils über den Abständen a_g und a_b wie in Abbildung 11 auf. Verbinden Sie die Messpunkte durch Kurven. Die Schnittpunkte dieser Kurven mit der Geraden $\gamma = 1$ liefern Ihnen die Lagen der Hauptebenen relativ zum Teleobjektiv. Vergleichen Sie den daraus ermittelten Hauptebenenabstand h mit dem Wert, der sich aus Gleichung 5 mit dem gemessenen Linsenabstand s ergibt.

(A7) Bestimmen Sie die Brennweite f des Teleobjektivs nach Gleichung 7 als Mittelwert und ihre Unsicherheit (Standardabweichung).

4 Maximale Vergrößerung

Oft ist es wünschenswert, kleine Gegenstände vergrößert zu betrachten[citation needed] , zum Beispiel um feine Details erkennen zu können. Linsen haben in diesem Bereich viele Anwendungen gefunden.

(M11) Nehmen Sie erneut die Linsen aus (M1). *Überlegen* Sie sich zunächst, wie Sie mit nur einer Linse ein möglichst großes Bild des Gitters erzeugen können. Was begrenzt die maximale Vergrößerung?
Probieren Sie nun, mit welcher Linse Sie die größte Vergrößerung erhalten. Welche Parameter können Sie noch ändern, um das Bild zu vergrößern? Bestimmen Sie jeweils die Vergrößerung γ.

(M12) Messen Sie für jede Linse für die Konfiguration mit der größten Vergrößerung die Gegenstands- und Bildweite sowie die Vergrößerung γ (jede*r von Ihnen zweimal).

(A8) Bestimmen Sie die maximal erreichte Vergrößerung für jede Linse und berechnen Sie aus Ihren Messwerten die Brennweiten der Linsen.

Literatur

[1] Walcher, W.(2004): *Praktikum der Physik,* Teubner Verlag, Wiesbaden, *DOI*: https://doi.org/10.1007/978-3-322-94128-2