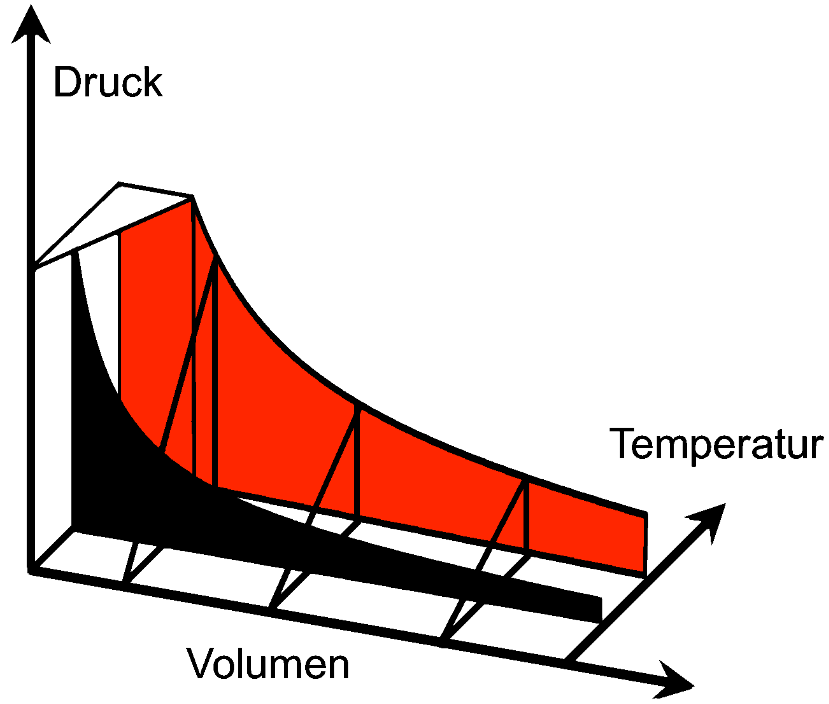


Ideale Gasgesetze

Ziele

Ziel des Versuchs und der Auswertung ist die experimentelle Bestätigung der Gasgesetze von Boyle-Mariotte, Gay-Lussac und dem Gesetz von Charles. Dabei wird jeweils eine Zustandsgröße konstant gehalten. Ihre Messdaten verwenden Sie in der Auswertung zur Überprüfung der Gasgesetze. Prüfen Sie im Rahmen einer sorgfältigen Fehlerfortpflanzungsanalyse die Qualität ihrer experimentellen Bemühungen.

Das sollten Sie wissen

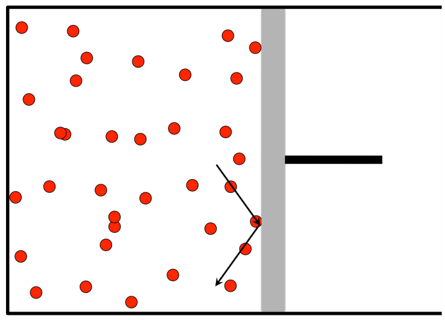
- Merkmale des Modells des idealen Gases, Grenzen des Modell
- Thermodynamische Zustandsgrößen von idealen Gasen
- Gesetze von Boyle-Mariotte, Gay-Lussac, Charles
- Statistische Analyse von Messungenauigkeiten

1 Theoretische Grundlagen: Ideale Gasgesetze

Zustandsgleichungen beschreiben das thermodynamische Verhalten von Gasen. Bei Temperaturen weit oberhalb des Kondensationspunktes ist die ideale Gasgleichung eine hervorragende Näherung:

$$P \cdot V = n \cdot k_B \cdot T = \upsilon \cdot R \cdot T \qquad (1)$$

- Makroskopische **Zustandsgrößen** (*P* ist der Gasdruck, *V* das Gasvolumen, *T* die absolute Temperatur)
- **Stoffgrößen** (*n* die Anzahl der Moleküle, υ die Stoffmenge)
- **Naturkonstanten** ($k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K die Boltzmann-Konstante, $R = 8{,}314$ J/(mol·K) die allgemeine Gaskonstante)



1 Zur Modellvorstellung des idealen Gases: Verschwindendes Eigenvolumen der Gasteilchen, keine Kräfte zwischen ihnen

In diesem Idealfall wirken keine Kräfte, außer beim Stoß der Gasteilchen mit den Gefäßwänden und das Eigenvolumen der Teilchen ist ohne Bedeutung. Edelgase und Luft bei Normalbedingungen erhalten sich in guter Näherung ideal.

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Raumtemperatur in Kelvin und den Umgebungsdruck in hPa. Wie rechnen sich hPa und bar ineinander um?

Die Temperatur spielt eine besondere Rolle. Sie ist nur definiert, wenn sich das betrachtete System im **thermischen Gleichgewicht** befindet. In dem Fall ändern sich seine Zustandsgrößen nicht. Außerdem stellt die Temperatur eine Verbindung zur Mikrowelt der Gasmengen her. Als ein wichtiges Ergebnis der statistischen Thermodynamik wissen wir, dass Sie ein Maß für die mittlere kinetische Energie der ungeordneten Bewegung der Gasteilchen ist.

Acht Schritte zum Druck im idealen Gas – Argumentation

(1) Beim Stoß eines Gasteilchens mit den Stempel (schwarze Pfeile in Abb. 1) wird ein Impuls auf diesen übertragen: $\Delta p_x = 2\, m \cdot v_x$ (x-Koordinate nach rechts).

(2) Die Hälfte alle N Gasteilchen fliegt im Mittel nach rechts. In der Zeit Δt treffen $\Delta N = \rho \cdot A \cdot v_x \cdot \Delta t/2$ Gasteilchen mit der Geschwindigkeit v_x auf den Stempel mit der Fläche A (ρ = Teilchendichte).

(3) Dabei wird auf den Stempel der Gesamtimpuls: $\Delta N \cdot \Delta p_x = (\rho \cdot \mathrm{A} \cdot v_x \cdot \Delta t/2) \cdot 2\, m \cdot v_x$ übertragen.

(4) Das bewirkt eine Kraft F_x auf den Stempel: $F_x = \Delta p_x/\Delta t = \rho \cdot \mathrm{A} \cdot v_x^2 \cdot m$.

(5) Die Geschwindigkeiten sind statistisch verteilt. Der Mittelwert der Geschwindigkeit ist null, aber der Mittelwert des Quadrates der Geschwindigkeit, $\langle v^2 \rangle$, ist von Null verschieden. Die drei räumlichen Geschwindigkeitskomponenten sind im Mittel gleich: $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \langle v^2 \rangle/3$ (Isotropie),

(6) Für die mittlere Kraft de Stempel erhält man also: $\langle F_x \rangle = \rho \cdot \mathrm{A} \cdot \langle v_x^2 \rangle \cdot m = \rho \cdot \mathrm{A} \cdot \langle v^2 \rangle \cdot m/3$.

(7) Diese Kraftkomponente ist für den Stempeldruck verantwortlich: $p = \langle F_x \rangle/\mathrm{A} = \rho\, \langle v^2 \rangle \cdot m/3$.

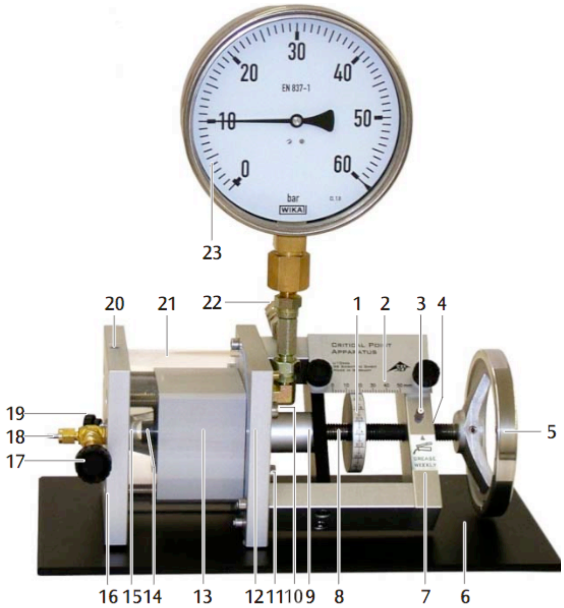
(8) Hier setzt man die Definition der absoluten Temperatur über die mittlere kinetische Energie ein und erhält die ideale Gasgleichung:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T \\ p = \frac{1}{3} \rho m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m \langle v^2 \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow pV = N k_B T. \qquad (2)$$

2 Experimente

Bei diesem Versuch dient normale Luft als Arbeitsgas. Abb. 2 zeigt den Aufbau. Die wichtigsten Bestandteile sind

- 1 ,2, 5: Skalen und Handrad zur Volumeneinstellung;
- 10, 11 Zu und Abfluss für das Temperiermedium
- 16–19 Gasventilplatte
- 20 Bohrung für Temperaturfühler
- 23 Manometer



2 Der experimentelle Aufbau, die vollständige Beschreibung finden Sie am Arbeitsplatz
Quelle: 3B SCIENTIFIC Anleitung zum Versuch 1002670

Der prinzipielle Versuchsablauf ist
(1) Maximales Volumen einstellen
(2) Einstellen einer bestimmten Temperatur im Wärmebad, warten bis das Gleichgewicht eingetreten ist und Temperatur ablesen
(3) das Gas komprimieren und expandieren und die Wertepaare Druck/Volumen ablesen (thermisches Gleichgewicht abwarten!).
(4) Den Ablauf bei höherer Temperatur wiederholen (Temperaturschritte 10 ° für Wassertemperaturen zwischen 20 und 60 °C)

M1: Aufnahme der Messwerte
1. Bestimmen Sie die Ablesegenauigkeiten $u(p)$ und $u(V)$.
2. Um systematische Fehler aufzuspüren, messen Sie bei einer eingestellten Temperatur zwei Kompressions- und Expansionsdurchgänge:

- p-Messung: Beim ersten Durchlauf stellen Sie das Volumen ein und messen den dazu gehörigen Druck („glatte“ Volumenwerte einstellen). Bestimmen Sie die relativen Abweichung $\Delta p/\langle p\rangle$ als Funktion der Temperatur.
- V-Messung: Beim zweiten Durchlauf stellen Sie den Druck ein und messen das dazu gehörige Volumen („glatte“ Druckwerte einstellen). Bestimmen Sie die relativen Abweichung $\Delta V/\langle V\rangle$ als Funktion der Temperatur.

Verteilen Sie jeweils 10 Messpunkte auf den verfügbaren Messbereich: **Gasdruck nie über 50 bar!**

Aus den Messreihen können Sie dann schließlich verschiedene Gasgesetze herausdestillieren:

2.1 Gesetz von Boyle-Mariotte

Das Gesetz von Boyle-Mariotte ist ein Grenzgesetz für den Fall idealer Gase. Ist die Temperatur konstant, dann auch das Produkt $p{\cdot}V$:

$$T = \text{konstant} \Rightarrow p \cdot V = C = \text{konstant}.$$

Über den Wert der Konstante sagt das Gesetz nichts.

M2: Stellen Sie das Produkt $p{\cdot}V$ als Funktion der Temperatur grafisch dar. Bestimmen Sie daraus <u>einen</u> Wert der Konstanten C. Bestimmen Sie daraus die Stoffmenge υ.
Messungenauigkeit: Berechnen Sie mithilfe der Fehlerfortpflanzung eine quantitative Obergrenze für die Ungenauigkeit Ihrer Messung der Stoffmenge (Mittlere Streuung um die Mittelwerte).

2.2 Gesetz von Gay-Lussac

Das Gesetz von Gay-Lussac wurde mit der Celsiusskala (Temperatursymbol ϑ)formuliert. Es besagt, dass bei konstantem Druck das Volumen linear mit der Celsius-Temperatur zunimmt:

$$V = V_0\left(1+\alpha\vartheta\right) \qquad (3)$$

Aufgabe: Zeigen Sie, dass aus Gl. 3 abgeleitet werden kann: V/T = const.

M2: Stellen Sie für jeweils konstante Druckwerte das Volumen als Funktion der Temperatur (in Celsius!) dar. Welche Ihrer Messreihen ist dazu die besser geeignetere, die p- oder die V-Reihen? Aus einer linearen Regression bestimmen Sie Achsenabschnitt und Steigung und daraus für die jeweiligen eingestellten Druckwerte das Gasvolumen bei 0 °C und den Koeffizienten α. Überprüfen Sie die erwartete Konstanz des Quotienten V/T.
Messungenauigkeit: Mithilfe der Fehlerfortpflanzung berechnen Sie die Genauigkeitsgrenze für α aus der Ablesegenauigkeit für p, T und V.

2.3 Gesetz von Charles

Ganz analog wie beim Gesetz von Gay-Lussac gilt ein Gesetz bei konstantem Volumen V: das Gesetz von Charles. Auch dieses wurde mit der Celsiusskala formuliert. Es besagt, dass bei konstantem Volumen der Druck linear mit der Celsius-Temperatur zunimmt:

$$p = p_0\left(1+\beta\vartheta\right) \qquad (4)$$

Aufgabe: Zeigen Sie, dass aus Gl. 4 abgeleitet werden kann: p/T = const.

M3: Stellen Sie für konstante Volumenwerte den Druck als Funktion der Temperatur (in Celsius!) dar. Nehmen Sie die p- oder die V-Messreihen dazu? Aus einer linearen Regression bestimmen Sie Achsenabschnitt und Steigung und daraus den Gasdruck bei 0 °C für die jeweils eingestellten Volumina und den Koeffizienten β.
Messungenauigkeit: Mithilfe der Fehlerfortpflanzung berechnen Sie die Genauigkeitsgrenze für β aus der Ablesegenauigkeit für p, T und V.

Für alle Messungen gilt: Benennen Sie, wenn diese nur gering seien sollten, die gemessenen Abweichungen von Ihren Erwartungen: Sind $p{\cdot}V$, V/T, p/T wirklich konstant? Werden die gemessenen Abweichungen von den von Ihnen für Ihre Messungen bestimmten statistischen Messungenauigkeiten abgedeckt?

3 Adiabatenkoeffizient nach Rüchardt

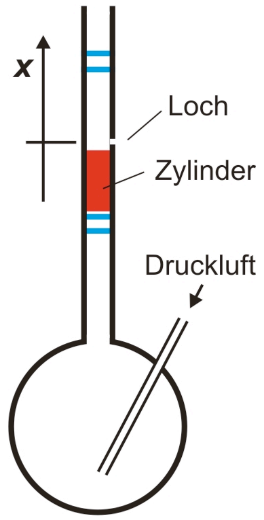
Lit.: E. Rüchardt, Physik. Zeitschr. **30**, 58 (1929) ; A. Flammersfeld, Z. Nat. **27a**, 540 (1972)

Thermodynamische Prozesse werden danach geordnet, welche der Zustandsgrößen während des jeweiligen Prozesses unverändert bleiben. Die einfachsten sind:

- Isotherme Prozesse: dT = 0; p und V ändern sich so, dass die Temperatur konstant bleibt.
- Isochore Prozesse: dV = 0; p und T ändern sich so, dass das Volumen konstant bleibt.
- Isobare Prozesse: dp = 0; T und V ändern sich so, dass der Druck konstant bleibt.
- Isentrope Prozesse: dS = 0; p, T und V ändern sich so, dass die Entropie konstant bleibt.
- Adiabate Prozesse, Q = 0 als Sonderfall der isentropischen Prozesse: ohne Austausch von Wärme und reversibel (also insbesondere ohne Dissipation).

Die bereits gemessenen Kurven sind Isothermen. Sie beschreiben also die Entwicklung von p und V während eines Prozesses mit konstanter Temperatur. Im B-Teil dieses Versuchs finden Sie eine Anordnung mit der sich ein reversibel-adiabater Prozess studieren lässt.

Die Messanordnung besteht aus einem Glaskolben mit einem senkrecht stehenden Glasrohr. Eine kleine Luftpumpe erzeugt einen geringen Überdruck im Kolben. Auf halber Länge des Rohres ist ein kleines Loch gesägt. In der Halbperiode, in der sich der Zylinder unterhalb des Loches befindet, wird er vom Überdruck nach oben getrieben. In der nächsten Halbperiode, wenn sich der Zylinder oberhalb des Loches befindet, kommt es zu einem Druckausgleich und der Zylinder sackt nach unten durch. Dem Zylinder wird durch diese Selbststeuerung im Takt der Schwingung Energie zugeführt, und es wird eine ungedämpfte Schwingung erzeugt. Die Luft im Kolben wird dabei ständig adiabatisch expandiert und komprimiert.



2 Der Aufbau zur Messung des Adiabatenkoeffizienten A: Querschnitt des Rohres; V: Volumen des Glaskolbens, p: Druck in dem Glaskolben (näherungsweise Luftdruck), m: Masse des Zylinders, x: Verschiebung des Zylinders

Für solche adiabatischen Prozesse gilt

$$p \cdot V^{\kappa} = const.; \kappa = \frac{c_p}{c_V} \; . \qquad (5)$$

Um die Bewegung des Kolbens zu beschreiben, betrachten wir den (kleinen) Druckunterschied Δp zwischen Ober- und Unterseite des Zylinders. Nach Gl. 5 führt dieser zu einer Verschiebung des Zylinders und damit, je nach Vorzeichen von Δp, zu einer kleinen Vergrößerung/Verkleinerung des Kolbenvolumens: $\Delta V(x) = x \cdot A$. Nach Gl. 5 hängen Druckänderung im Kolben und Volumenänderung zusammen:

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} + \kappa \frac{\mathrm{d}V}{V} \approx \frac{\Delta p}{p} + \kappa \frac{\Delta V}{V} 0 \, . \qquad (6)$$

Damit kann man nun eine Bewegungsgleichung des Zylinders (Masse m) direkt aus Gl. 6 herleiten:

$$F = m\ddot{x} = \Delta p A = -\kappa A \frac{p}{V} \Delta V = -\frac{\kappa p}{V} A^2 x = -\kappa A^2 \frac{p}{V} x \;\Rightarrow$$

$$\ddot{x} + \frac{\kappa}{m} A^2 \frac{p}{V} x = 0$$

Das ist gesuchte Bewegungsgleichung, die Gleichung eines harmonischen Oszillators mit der Frequenz

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\kappa A^2}{m} \frac{p}{V} \Leftrightarrow T = \frac{1}{f} = 2\pi \frac{mV}{\kappa A^2 p} . \qquad (7)$$

M4: Der Luftstrom muss so eingestellt werden, dass der Zylinder symmetrisch um das Ausströmloch schwingt. Mit etwas Geduld gelingt Ihnen das sicherlich.

1. Messen Sie danach jeder/jede von Ihnen 5mal 10 Schwingungsdauern T.
2. Messen Sie Ihre eigene Reaktionszeit und bestimmen Sie daraus die Messunsicherheit $u(T)$: Lassen Sie eine Stoppuhr laufen, und versuchen Sie zu einer fest vorgegebenen Zeit zu stoppen. Jeder 10 Messungen, $u(T)$ = Mittelwert der Abweichungen.
3. Leiten Sie eine Formel für κ nach Gl. 7 her und bestimmen sie κ (Werte für V, A, m am Arbeitsplatz) aus der mittleren Schwingungsdauer.
2. Geben Sie den relativen Fehler für κ als Funktion von T und p an (Fehlerfortpflanzung).
3. Vergleichen Sie Ihren gemessenen Wert κ mit dem in der Literatur angegebenen Wert.
4. Wie groß ist der folgende systematische Fehler? Der Zylinder befindet sich im Gleichgewicht, wenn der Druck p in dem Rezipienten

$$p = p_L + \frac{m\,g}{A}$$; p_L: Luftdruck

beträgt. In den Gl. oben wurde näherungsweise $p = p_L$ angenommen.