1. ZIELE

In diesem Versuch sollen Sie strömende Flüssigkeiten untersuchen: Wie hängt die Strömungsgeschwindigkeit von der Druckdifferenz, dem Rohrquerschnitt und dem Reibungswiderstand ab? Sie werden den Reibungswiderstand (Zähigkeit, Viskosität) von Wasser, Öl, Glyzerin oder einer Flüssigkeit, die Sie selber mitbringen (mindestens ½ Liter), bestimmen.

2. FRAGEN ZUR VORBEREITUNG

- Wie ist physikalisch Druck festgelegt?
  Er wird in der Einheit Pa (Pascal) gemessen: 1 Pa = ...

- Für den Alltagsgebrauch ist diese Einheit zu klein, man benutzt stattdessen häufig den typischen Druck der Atmosphäre:

  $$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 1000 \text{ hPa (Hektopascal).}$$

  Wie groß ist der Normaldruck der Atmosphäre, wie groß der Druck im Fahrradreifen?

- In der Medizin wird der Blutdruck noch traditionell in der alten Einheit mmHg (Millimeter Quecksilber) gemessen: 1 mmHg = 133 Pa. Ein Blutdruck 130 zu 80 meint: 130 mmHg in der Systole und 80 mmHg in der Diastole. Wie groß ist der Mittelwert des Blutdrucks in Pa?

- Wie groß ist der Druck in 5 m Wassertiefe (Schweredruck des Wassers)?
  In welche Richtung wirkt er?

- Kennen Sie Messgeräte für den Druck? Wie funktionieren sie?

- Wie viel Flüssigkeit durch ein Rohr fließt, misst man mit der (Volumen-) Stromstärke *I:*

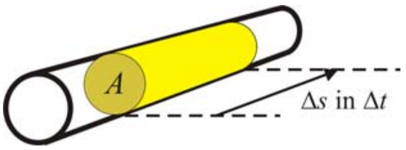

Abb. 1. In der Zeit Δt fließt durch den Querschnitt A das Volumen $\Delta V = A\,\Delta s$

$$I = \frac{\text{durch Rohrquerschnitt } A \text{ fließendes Volumen } \Delta V}{\text{dazu benötigte Zeit } \Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \qquad (1)$$

Mit der mittleren Geschwindigkeit $\Delta\bar{v}$ der Flüssigkeit im Rohr gilt $\Delta V = A\,\Delta s = A\,\bar{v}\,\Delta t$,
und für die Stromstärke folgt $I = A\,\bar{v}$. (2)

- Die mittlere Blutstromstärke des Menschen beträgt etwa $I = 6 \text{ l/min} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$. Unser Herz pumpt das Blut durch die Aorta mit ca. 4,5 cm² und durch feine Kapillaren mit insgesamt etwa 4500 cm² Querschnittsfläche. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit in der Aorta, wie groß in den Kapillaren?

3. LAMINARE STRÖMUNG

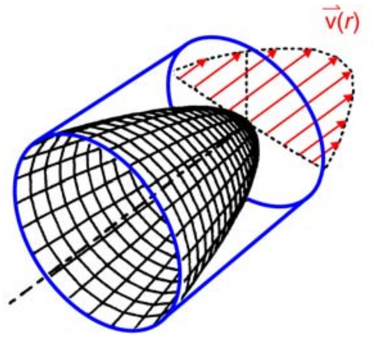

Abb. 2 Geschwindigkeitsprofil einer laminaren Strömung. In der Mitte eines Rohres ist die Geschwindigkeit am größten.

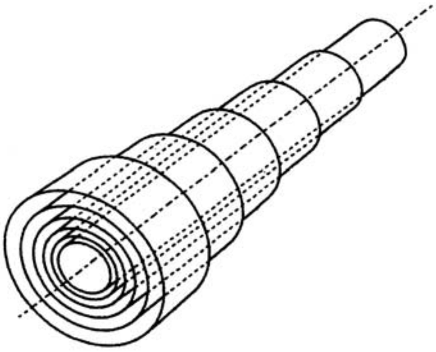

Abb. 3 Modellvorstellung

Flüssigkeiten strömen durch ein Rohr, wenn an den Enden des Rohres ein Druckunterschied besteht. Die Geschwindigkeit ist dabei in der Mitte des Rohres am größten, an der Rohrwand haftet die Flüssigkeit und bleibt in Ruhe: Es bildet sich ein Geschwindigkeitsprofil im Rohr aus.

Im Modell denkt man sich das Rohr aus differenziell dünnen Hohlzylindern zusammengesetzt, in jedem Hohlzylinder strömt die Flüssigkeit mit einer anderen Geschwindigkeit. Die äußeren Hohlzylinder bleiben gegenüber den inneren stets zurück. Zwischen benachbarten Hohlzylindern muss daher eine Reibungskraft F_W wirken. Diese ist für alle Flüssigkeiten proportional zu der Berührungsfläche A (Zylindermantel) und dem Geschwindigkeitsgefälle $\Delta v/\Delta r$ (wie ändert sich v mit r)

$$F_w = \eta \; A \; \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta r} \qquad \textbf{Newtonschen Reibungsgesetz} \qquad (3)$$

Der Vorfaktor η (die Abhängigkeit von der Flüssigkeit selbst) heißt Viskosität oder Zähigkeit und wird in der etwas gewöhnungsbedürftigen Einheit

$[\eta] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\cdot \mathrm{s} = \mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$ (Pascalsekunde) angegeben.

> Je größer die Viskosität η,
> desto größer die Reibungskraft F_W.

Die Viskosität einer Flüssigkeit ist keine Konstante, sie nimmt in der Regel mit steigender Temperatur ϑ ab:

Tabelle 1	Viskosität $\eta\,(\vartheta)$ in mPa·s (MilliPascalsekunde)					
	0°C	20°C	40°C	60°C	80°C	100°C
Wasser	1,79	1,00	0,65	0,47	0,36	0,28
Glyzerin	12100	1410	238	81	31,8	14,8

Bei hinreichend kleinen Geschwindigkeiten gleiten die dünnen Hohlzylinder wirbelfrei aneinander. Man nennt solche Strömungen laminar (im Unterschied zu den turbulenten).
Für laminare Strömungen gilt das **Gesetz von Hagen-Poiseuille**:

$$I = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi\, r^4}{8 \eta L}\,\Delta p = \frac{\Delta p}{R} \qquad (4)$$

r: Rohrradius
L: Rohrlänge
η: Viskosität
Δp: Druckunterschied an den Rohrenden

mit dem Strömungswiderstand $R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$.

Je länger das Rohr, umso ... . Je größer der Druckunterschied, umso ... .
Bemerkenswert ist, dass sich die Stromstärke I mit der vierten Potenz des Rohrradius r ändert. Wird der Durchmesser einer Arterie nur um 1/5 erweitert, also um den Faktor 1,2 , so wird bei gleichem Blutdruck bereits die doppelte Blutmenge transportiert. $((1,2)^4 \;\cong\; 2)$!

4. KAPILLARVISKOSIMETER

Mit ihm sollen Sie die Zähigkeit von Wasser bestimmen und das Gesetz von Hagen-Poiseuille überprüfen.

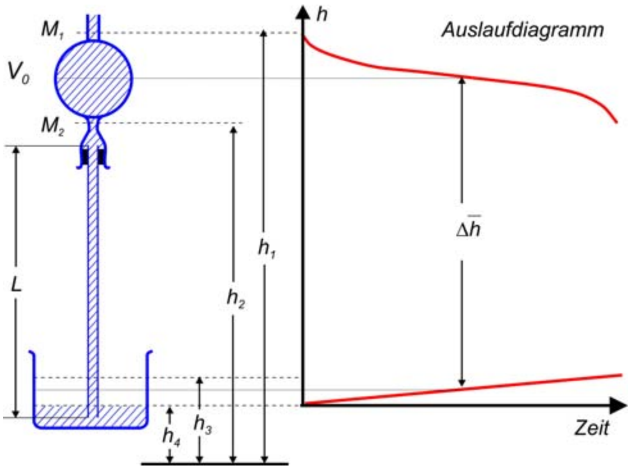

Abb. 4 Versuchsaufbau des Kapillarviskosimeters

Die Flüssigkeit strömt aus einem Vorratsgefäß V_0 durch eine senkrecht stehende Kapillare der Länge L. Der Druckunterschied wird dabei von dem eigenen Schweredruck erzeugt. In der Abb. 4 ist der obere Flüssigkeitspegel bei der Messmarke M_1 gezeichnet. Der Schweredruck beträgt dann in der Höhe h_4 des Flüssigkeitsspiegels im unteren Auffanggefäß gerade

$$\Delta p = \rho\, g\, (h_1 - h_4) \qquad (5)$$

mit der Dichte ρ und der Erdbeschleunigung g. Der zusätzliche Luftdruck trägt fast nichts zum Druckunterschied bei.

Wenn die Flüssigkeit ausströmt, ändert sich ständig die Höhendifferenz wie in dem Auslaufdiagramm Abb. 4 angedeutet. Da aber sowohl ΔV als auch Δp direkt proportional zu Δh sind, kann man im Gesetz von Hagen-Poiseuille mit ihren mittleren Werten rechnen:

$$I = \frac{\Delta\overline{V}}{\Delta t} = \frac{\pi r^4}{8\eta L}\,\Delta\overline{p} = \frac{\pi r^4}{8\eta L}\,\rho\, g\,\Delta\overline{h} \qquad \text{mit} \qquad \Delta\overline{h} = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) - \frac{1}{2}(h_3 + h_4)\ . \qquad (6)$$

Für die Stromstärke I interessiert nur das ausströmende Volumen zwischen den Marken M_1 und M_2: Da $\Delta\overline{V} = V_0$ = konstant (am Arbeitsplatz) ist, müssen Sie lediglich die Durchflusszeit Δt messen.

4.1. Versuch: Bestimmung der Viskosität von Wasser

Regeln Sie den oberen Flüssigkeitspegel auf die Messmarke M_1 . Messen und notieren Sie in dieser Einstellung die Höhen h_1 , h_2 und h_4 (jeder von Ihnen einmal, Mittelwert).
So messen Sie die Zeit Δt für das Ausströmen zwischen den Marken M_1 und M_2 :
Ziehen Sie zuerst das Wasser etwas über die Messmarke M_1 hoch. Starten Sie die Stoppuhr beim Passieren der Marke M_1. Stoppen Sie die Uhr genau dann, wenn die Marke M_2 erreicht wird. Ziehen Sie anschließend das Wasser genau bis zur Marke M_2 wieder hoch, und messen Sie in dieser Einstellung die Höhe h_3 . Wiederholen Sie die Messung einmal.

Für die Auswertung benötigen Sie die folgenden Werte mit ihren Messabweichungen *u*:

	V_0	L	r	h_1	h_2	h_4
Messwert						
Messabweichung *u*			0,001 mm	1 mm	1 mm	1 mm

	h_3	Δt
1. Messung		
2. Messung		
Messabweichung *u*	1 mm	

und die Wassertemperatur ϑ in °C zu Versuchsanfang und Ende: $\vartheta_{\text{Anfang}}$ = ... ϑ_{Ende} = ...
$\rho_{Wasser} = 1\ \text{g/cm}^3 = 1 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$; $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$

Auswertung: Berechnen Sie

- zunächst die Mittelwerte für h_3 und Δt aus Ihren beiden Messungen.
- den Mittelwert $\Delta \overline{h}$ und den absoluten Größtfehler $\Delta(\Delta\overline{h})$.
- die mittlere Druckdifferenz $\Delta\overline{p} = \rho\ g\ \Delta\overline{h}$ und die relative Messabweichung $\frac{\Delta(\Delta\overline{p})}{\Delta\overline{p}}$.
- die Stromstärke $I = \frac{V_0}{\Delta t}$ und die relative Messabweichung $\frac{\Delta I}{I}$.

Den Wert für die Viskosität erhalten Sie aus Gl. (6) und ihre Messabweichungen aus

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = 4\frac{u(r)}{r} + \frac{u(L)}{L} + \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta(\Delta\overline{p})}{\Delta\overline{p}} \ .$$

Wie groß ist der Literaturwert für die Viskosität von Wasser bei der gemessenen Temperatur?

4.2. Versuch: Die extreme Abhängigkeit vom Rohrradius

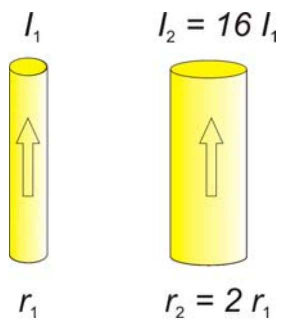

Abb. 5 Bei doppeltem Radius strömt 16-mal mehr durch eine Röhre.

Für zwei *gleich lange* Kapillare mit verschiedenen Radien r_1 und r_2 gilt bei gleichem Druckgefälle Δp nach dem Gesetz von Hagen-Poiseuille (4):

$$I_1 \approx r_1^4 \text{ und } I_2 \approx r_2^4 \ .$$

Um diese Gesetzmäßigkeit zu prüfen, wiederholen Sie den vorigen Versuch mit vier weiteren Kapillaren gleicher Länge aber mit unterschiedlichen Radien.

Notieren Sie das Messvolumen V_0 , die Radien r_i und messen Sie die Durchflusszeiten Δt_i .

V_0 =	Radius r	Durchflusszeit Δt	r^4	$I = V_0 / \Delta t$	I / r^4
Kapillare 1					
Kapillare 2					
Kapillare 3					
Kapillare 4					

Auswertung:
Berechnen Sie die Stromstärken I .
Sie könnten Ihre Messwerte wie üblich in einem Koordinatensystem $I = I\ (\ r\ )$ eintragen. Anschaulicher wird es jedoch, wenn Sie die Werte in einem Koordinatensystem $I = I\ (\ r^4\ )$ darstellen. Legen Sie eine Ausgleichsgerade durch Ihre Messwerte. Liegen Ihre Werte innerhalb der Fehlergrenzen?

Diese Abhängigkeit vom Radius erklärt die Schwierigkeiten beim Verkalken unserer Arterien. Fallen Ihnen noch andere Beispiele ein?

5. ROTATIONSVISKOSIMETER

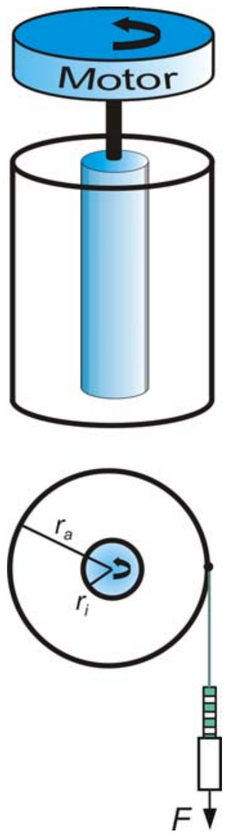

Abb. 6 Modell eines Rotationsviskosimeters

In dem Spalt zwischen zwei konzentrisch angeordneten Zylindern mit den Radien r_i und r_a befindet sich eine zähe Flüssigkeit. Der innere Zylinder wird von einem Motor mit konstanter Drehzahl N (Umdrehungen pro Minute) angetrieben. Ist der äußere Zylinder drehbar gelagert, wird er wegen der inneren Reibung ebenfalls anfangen zu rotieren, wenn auch verzögert. Sie können ihn daran hindern, indem Sie ihn einfach festhalten. Mit einem tangential angebrachten Kraftmesser könnten Sie die Kraft F ermitteln, die dazu nötig ist, und bei bekanntem Radius r_a auch das Drehmoment $M = r_a F$, das dabei auf den äußeren Zylinder ausgeübt wird.

Von welchen Größen wird dieses Drehmoment M abhängen?
Sie werden vermuten, dass

> je größer die Viskosität η , desto ...
> je größer die Drehzahl N, desto ...
> je größer der Spalt $r_a - r_i$ zwischen den Zylindern, desto ...

Tatsächlich kann man zeigen (s. letzte Seite), dass gilt

$$M = C\,\eta\,N \qquad (7)$$

mit einer Apparatekonstante C, die nur von den geometrischen Abmessungen und dem Abstand der Zylinder abhängig ist. Da sich zusätzliche Randeffekte kaum berechnen lassen, bestimmt man diese Apparatekonstante C in der Regel experimentell mit einer Flüssigkeit bekannter Viskosität.

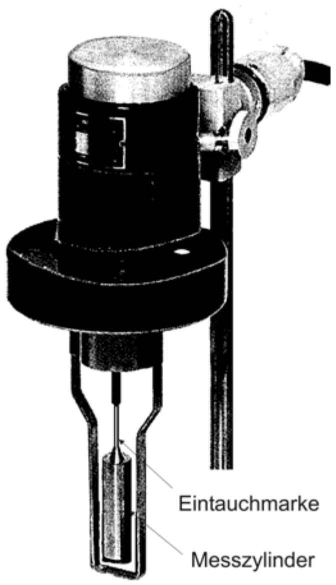

Abb. 7 Der Messzylinder dieses Rotationsviskosimeters wird in ein 600 ml Becherglas getaucht.

5.1. Messverfahren

In dem Praktikumsversuch ist der äußere Zylinder ein handelsübliches 600 ml Becherglas, das auf dem Tisch fest steht und sich nicht drehen kann. Das Drehmoment wird hier mit einer aufwändigen Mechanik am innen rotierenden Zylinder (= Messzylinder) direkt gemessen und nicht, wie oben beschrieben, am äußeren.

Tauchen Sie den Messzylinder bis zur Eintauchmarke in das Becherglas mit Glyzerin ein.

Richten Sie das Viskosimeter mit den drei Schrauben am Stativfuß senkrecht aus. Sie können dies mit der Libelle auf dem Gehäuse kontrollieren.

Auf dem viereckigen Drehknopf des Viskosimeters gibt die oben abzulesende Zahl die Drehzahl an (6, 12, 30, 60 U/min). Sie können die Drehzahl bei laufendem Motor ändern.

Die Skalenscheibe dreht sich mit dem Messzylinder mit und lässt sich im Betrieb nur bei geringen Geschwindigkeiten ablesen. Bei höheren Drehzahlen muss man mit einem Arretierhebel die Skalenscheibe gegen den Zeiger anheben um damit die Anzeige zu fixieren und dann bei ausgeschaltetem Motor ablesen.

Beginnen Sie bitte mit der Drehzahl 12 U/min. Warten sie einige Minuten mit der Messung, bis sich die Anzeige stabilisiert hat.
Wiederholen Sie die Messung mit den höheren Drehzahlen. Anzeigen unter 10 Skalenteilen sollten Sie wegen der Messungenauigkeit verwerfen.
Da die Viskosität empfindlich von der Temperatur abhängig ist, notieren Sie diese bitte für jede Messung. Sie benötigen sie unbedingt für die Auswertung.

Drehzahl in U/min	12	30	60
ϑ in °C			
M* in Skt			
η in m Pa s			

Auf der Skala des Viskosimeters lesen Sie M* Skalenteile ab. Den Wert der Viskosität erhalten Sie daraus nach Gl. (7):

$$\eta = \frac{M}{C\ N} = \frac{C^*}{N} M^* \quad \text{in } 10^{-3} \text{ Pa s}$$

C* = 1/C Apparatekonstante (Messzylinder)
hier im Versuch ist: C* = 60
M* abgelesene Skalenteile der Anzeige
= Drehmoment M in 10^{-3} Nm
N Anzahl der Umdrehungen pro Minute

Beispiel: Mit dem Messzylinder 1 lesen Sie bei 30 Umdrehungen pro Minute auf der Anzeige 22,5 Skalenteile ab.

C* = 60 M* = 22,5 N = 30 : $\eta = \frac{60}{30}\ 22{,}5\ \text{m Pa s} = 45\ \text{m Pa s}$

5.2. Wie ändert sich die Viskosität mit der Temperatur?

Messen Sie Viskosität nach dem oben beschriebenen Verfahren für 5 verschiedene Temperaturen – zwischen Zimmertemperatur und maximal 60°C

Auswertung:
Bestimmen Sie für jede Temperatur den Mittelwert und stellen Sie graphisch $\eta = \eta\,(\vartheta)$ dar.
Ihre Werte werden nicht mit denen aus der Tabelle 1 übereinstimmen. Im Versuch verwenden Sie ein Glyzeringemisch mit 20% Wasseranteil.

5.3. Versuch: Wie groß ist die Viskosität von ... ?

Im Praktikum können Sie zwischen Ketchup, Olivenöl, Stärke (Mondamin), Motorenöl, Tapetenkleister wählen. Oder Sie bringen Ihre eigene Flüssigkeit mit, mindestens 500ml.

Verlassen Sie bitte Ihren Arbeitsplatz sauber. Es gibt Papiertücher, um die Glyzerinreste wegzuwischen.

Nur für Interessierte zu Gleichung 7:

Bei einer laminaren Strömung wird die Geschwindigkeit linear mit dem Radius *r* vom rotierenden zum ruhenden Zylinder abnehmen, also

$$\mathrm{v}(r) = a\,r + b \qquad (8)$$

Die Konstanten a und b ergeben sich aus den Randbedingungen $\mathrm{v}(r_i) = \omega\, r_i$ und $\mathrm{v}(r_a) = 0$, mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Setzt man dies in Gl.(8) ein, so erhält man zwei Gleichungen

$\omega\, r_i = a\, r_i + b \quad und \quad 0 = a\, r_a + b$ und daraus

$$a = -\frac{\omega\, r_i}{r_a - r_i} \quad , \quad b = \frac{\omega\ r_a\ r_i}{r_a - r_i}$$

Für unser Geschwindigkeitsprofil Gl.(8) folgt $\quad \mathrm{v}(r) = \dfrac{\omega\, r_i}{r_a - r_i}\,(r_a - r)$,

für das Geschwindigkeitsgefälle $\quad \dfrac{d\,\mathrm{v}(r)}{dr} = -\dfrac{\omega\, r_i}{r_a - r_i}$

und für das Drehmoment mit Gl.(3) $\quad M = r\,F = r\ (\eta\, A\, \dfrac{d\mathrm{v}}{dr})$.

Mit der Zylindermantelfläche $A = 2\pi r\, h$ $\quad M = r\ (\eta\ 2\pi\, r\, h\, \dfrac{d\mathrm{v}}{dr}) = \eta\ 2\pi\, r^2\, h\, \dfrac{d\mathrm{v}}{dr}$

am inneren Messzylinder $r = r_i$ also $\quad M = \eta\ 2\pi\, r_i^2\, h\, \dfrac{d\mathrm{v}}{dr} = \eta\ 2\pi\, r_i^2\, h\ \dfrac{\omega\, r_i}{r_a - r_i}$.

Mit der Winkelgeschwindigkeit $\quad \omega = 2\pi f = 2\pi\ N/60$

und der Konstanten $\quad C = \dfrac{1}{60}\ \dfrac{4\pi^2\, r_i^3\, h}{r_a - r_i}$,

ergibt sich Gl.(7) $\quad M = C\ \eta\, N$

Anbei:

Glyzerin ($C_3H_5(OH)_3$) ist *hygroskopisch*, d.h. wasseranziehend. Lässt man es längere Zeit offen stehen, so nimmt es aus der Umgebungsluft Feuchtigkeit auf, d.h. es entsteht ein Gemisch, dessen Wassergehalt im Laufe der Zeit zunimmt.

$C_3H_5(OH)_3$ Vol.-%	**H_2O Vol.-%**	**η $kg\ m^{-1}s^{-1}$**
100	0	1,41
99	1	1,15
98	2	0,939
90	10	0,219
50	50	0,006

Tabelle: Viskosität von Glyzerin/Wasser- Gemischen bei 20°C
(nach: Weast, R. C. [Ed.]: „CRC Handbook of Chemistry and Physics“)