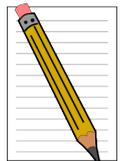


## Gitter

In diesem Versuch untersuchen Sie die physikalischen Eigenschaften eines optischen Gitters. Zu diesen zählen insbesondere die Gitterkonstante und das Auflösungsvermögen.

### Schriftliche VORbereitung:

- Wie entsteht ein Gitterspektrum? Erläutern Sie den Begriff *Beugung* in Abgrenzung zum Begriff *Brechung*.
- Wo liegen die Maxima und Minima?
- Wie verläuft der Strahlengang in einem Gitterspektralapparat?
- Welche Funktion haben die Bauteile? Warum kann man in [Abbildung 6](#) nicht die Linien der Leuchtstoffröhre getrennt auflösen? Welches Bauteil fehlt hier?
- Wie groß ist das Auflösungsvermögen eines optischen Gitters? Beziehen Sie sich auf [Abbildung 1](#) und erläutern Sie das Rayleigh-Kriterium.
- Leiten Sie die Gleichung (3) aus [Abbildung 1](#) her. Erklären Sie die Bedeutung der Faktoren in Gleichung (6) (Lit.: z.B. [2, Demtröder], [1, Bergmann/Schäfer]).



# 1 Grundlagen

## In welcher Richtung beobachtet man die Spektrallinien?

Fällt monochromatisches, paralleles und kohärentes Licht auf ein Gitter, so stellen die  $N$  Spalten gleichphasig oszillierende Quellen dar (Huygens Prinzip). Für die Intensitätsverteilung auf dem Beobachtungsschirm gilt:

$$I = I_0 \cdot \left( \frac{\sin(N \cdot \alpha)}{\sin(\alpha)} \right)^2. \quad (1)$$

Die Maxima dieser Verteilung ergeben sich, wenn der Gangunterschied zwischen zwei benachbarten Strahlen ein Vielfaches von  $\lambda$  beträgt. Dies ist der Fall für:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot k \cdot g \cdot \sin(\varphi) = m \cdot \pi, \quad (2)$$

$$\sin(\varphi_{\max}) = \frac{m \cdot \lambda}{g} \quad (3)$$

Licht einer einzigen Wellenlänge  $\lambda$  erzeugt daher mehrere Intensitätsmaxima, Ordnungen (s. Abb. 1 - 3).

- $I_0$  = Intensität eines Spaltes
- $N$  = Anzahl der Spalten
- $\alpha = 1/2 \cdot k \cdot g \cdot \sin(\varphi)$
- $\varphi$  = Beobachtungsrichtung
- $g$  = Abstand der Spalte
- $k = 2 \cdot \pi / \lambda$
- $m \in \mathbb{N}_0$

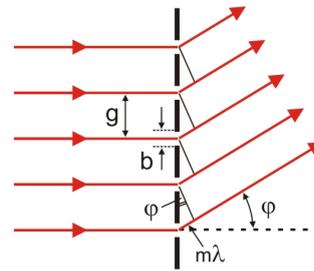


Abbildung 1: Gangunterschiede und Beobachtungsrichtung.

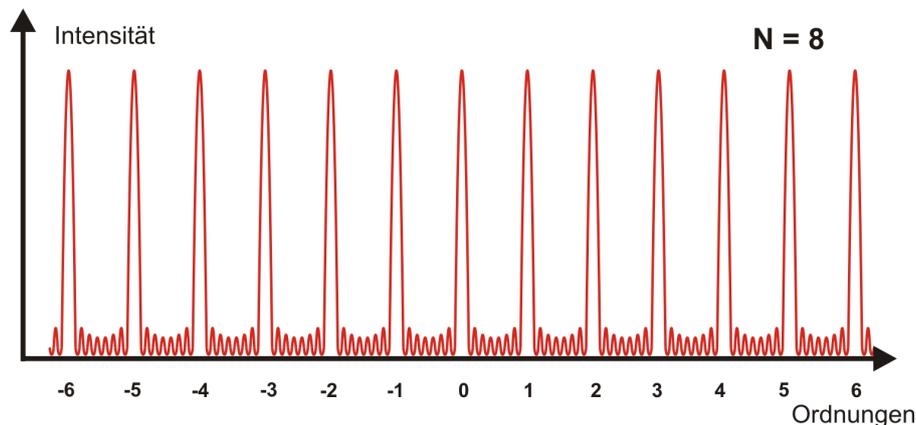


Abbildung 2: Intensitätsverteilung bei  $N$  gleichen Erregern.

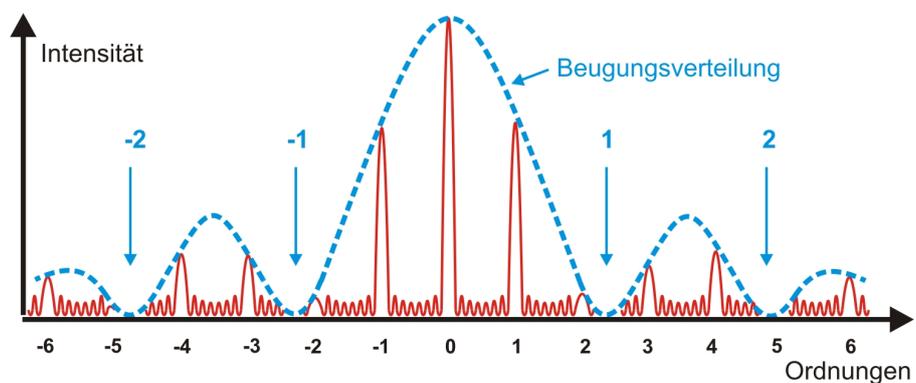


Abbildung 3: Intensitätsverteilung bei einem Beugungsgitter.

## Wie groß sind die Intensitäten in den Maxima?

Für die Maxima gilt  $\alpha \rightarrow m \cdot \pi$ , und Gl. (1) wird ein unbestimmter Ausdruck. Als Grenzwert ergibt sich bei  $\alpha = m \cdot \pi$  für die Intensitäten  $I_{max}$  in den Maxima:

$$I_{max} = N^2 \cdot I_0 \quad (4)$$

Die Intensitäten der Spektrallinien sind demnach um den Faktor  $N^2$  größer als die der Einzelspalte  $I_0$ . Diese Überlegungen lassen jedoch außer acht, dass die Einzelquellen hier selbst Spalte sind. Sie besitzen daher keine gleichförmige Intensitätsverteilung  $I(\varphi) = I_0$  in alle Richtungen, wie angenommen, sondern es gilt für einen Spalt der Breite  $b$ :

$$I(\varphi) = I_0 \cdot \left( \frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2 \quad (5)$$

$\beta$  =  $1/2 \cdot k \cdot b \cdot \sin(\varphi)$

$k$  =  $2 \cdot \pi / \lambda$

$b$  = Breite des Spaltes

$\varphi$  = Beobachtungsrichtung

und um diesen Faktor ändert sich auch die Intensitätsverteilung bei einem Gitterspektroskop:

$$I = I_0 \cdot \left( \frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2 \cdot \left( \frac{\sin(N \cdot \alpha)}{\sin(\alpha)} \right)^2 \quad (6)$$

Die Intensitäten der Spektrallinien höherer Ordnung werden entsprechend kleiner, wie in Abb. 3 angedeutet.

## Wie breit sind die Spektrallinien?

Zwischen 2 Hauptmaxima mit  $\alpha = m \cdot \pi$  und  $\alpha = (m + 1) \cdot \pi$  (s. Gl. (2)) nimmt der Zähler in Gl. (1) mehrmals den Wert Null an:

$$\sin(N \cdot \alpha) = 0 \quad (7)$$

Für  $N \cdot \alpha = n \cdot \pi$  mit  $n = 1, 2, \dots, N - 1$  also liegen bei:

$$\sin(\varphi) = n \cdot \lambda / N \cdot g$$

$n = 0$  :  $m$ -tes Hauptmaximum

$n = N$  :  $m + 1$ -tes Hauptmaximum

jeweils Minima, und zwischen 2 Hauptmaxima findet man insgesamt (s. Abb. 4 und Abb. 2 für  $N = 8$ )

$N - 1$  Minima und

$N - 2$  Nebenmaxima.

Die Breite einer Spektrallinie ergibt sich aus dem Abstand des  $m$ -ten Maximums zu den beiden nächstliegenden Minima, und die Linien werden mit steigender Anzahl  $N$  der benutzten Spalte schärfer (s. Abb. 4).

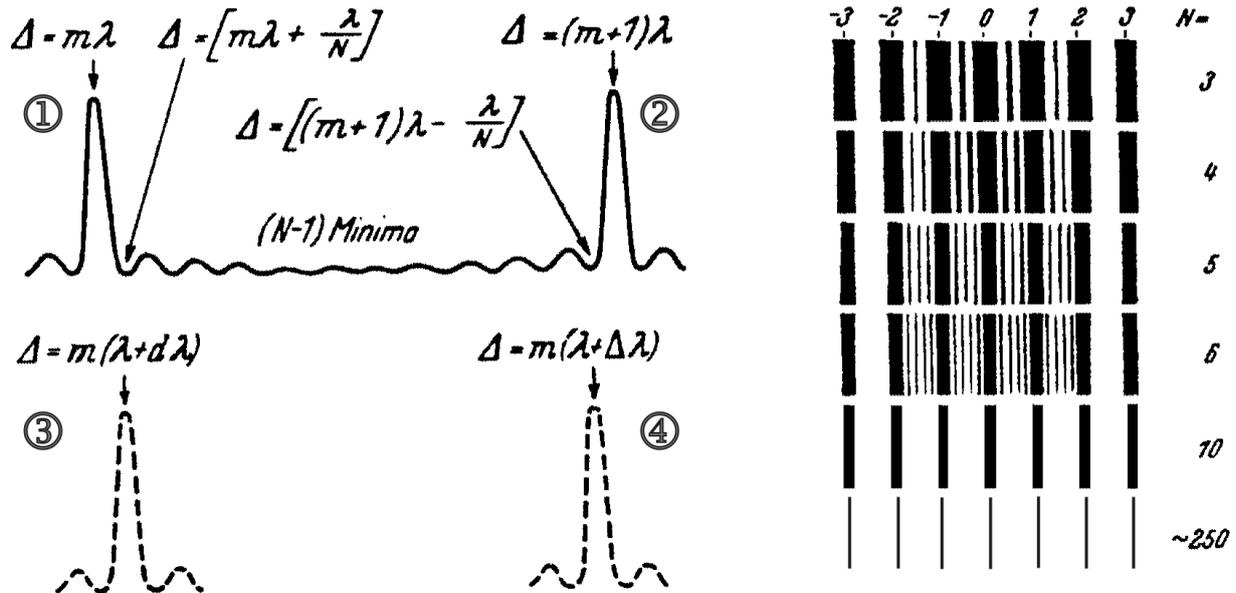


Abbildung 4: Gangunterschiede und Spektren

### Wie groß ist das Auflösungsvermögen?

Die Spektrallinie ①  $m$ -ter Ordnung in Abb. 4 entsteht bei einem Gangunterschied  $\Delta = m \cdot \lambda$  zwischen zwei benachbarten Wellenzügen, die Linien ②  $(m + 1)$ -ter Ordnung entsprechend bei  $\Delta = (m + 1) \cdot \lambda$ . Bei dem ersten Minimum, das nach ① auftaucht, ist der Gangunterschied von  $\Delta = m \cdot \lambda$  auf  $\Delta = m \cdot \lambda + \lambda/N$  angewachsen. Nach dem vorigem Abschnitt liegen  $N - 1$  äquidistante Minima zwischen ① und ②.

Wir wollen die Lage von 2 verschiedenen Spektrallinien vergleichen:

- ①: die Spektrallinie  $m$ -ter Ordnung mit der Wellenlänge  $\lambda$ ,
- ③: die Spektrallinie  $m$ -ter Ordnung mit der Wellenlänge  $\lambda + d\lambda$ .

Wie groß muss der Mindestabstand dieser beiden Linien sein, damit man sie in  $m$ -ter Ordnung unterscheiden kann? Dazu fordert man, dass das  $m$ -te Maximum der Linien ③ in das erste Minimum von ① nach dessen  $m$ -ten Maximums fällt, Rayleigh-Kriterium (s. Abb. 4). Daher muss für die entsprechenden Gangunterschiede zweier benachbarter Wellen gelten:

$$m \cdot (\lambda + d\lambda) = m \cdot \lambda + \frac{\lambda}{N}$$

$$m \cdot d\lambda = \frac{\lambda}{N}$$

Für das gesuchte Auflösungsvermögen  $A = \lambda/d\lambda$  ergibt sich hieraus direkt:

$$\frac{\lambda}{d\lambda} = m \cdot N \quad (8)$$

Bei einem Gitter ist daher das Auflösungsvermögen  $A$  umso größer,

1. je mehr Gitterspalte  $N$  ausgeleuchtet werden und
2. je höher die Ordnung  $m$  ist, in der beobachtet wird.

## Was versteht man unter dem nutzbaren Spektralbereich?

Im Gitterspektrum liegt nach Gl. (2) das langwellige rote Licht immer außen, das kurzwellige violette innen. Eine Folge dieser Anordnung ist, dass zu einer bestimmten Richtung mehrere Wellenlängen beitragen können und dass sich die Spektren höherer Ordnung überlappen.

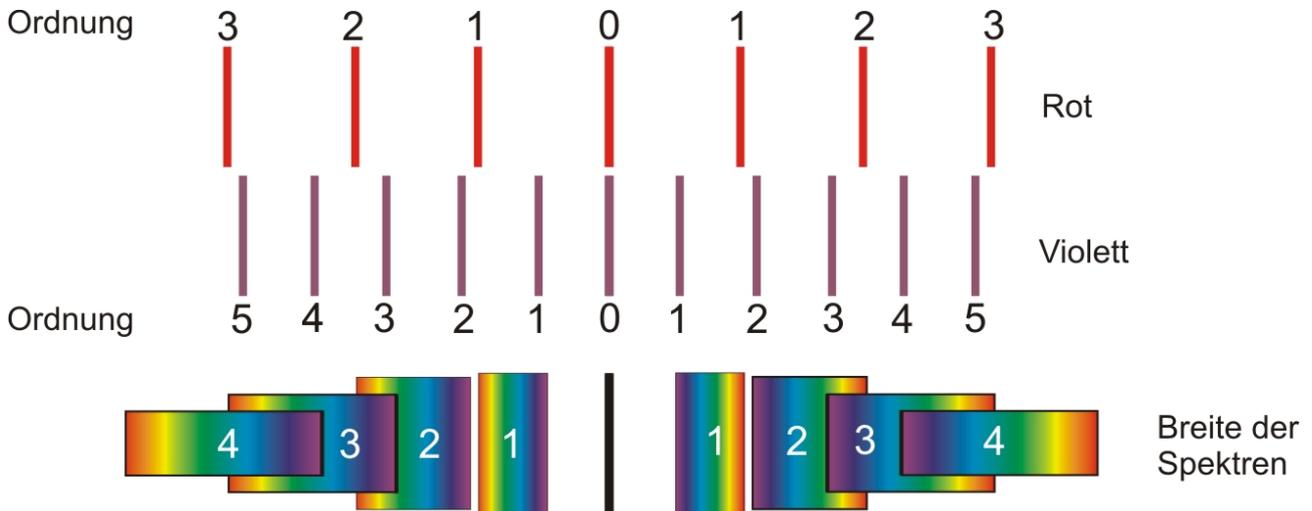


Abbildung 5: Die Gitterspektren überlappen sich hier ab der 2. Ordnung (Quelle: [3, Pohl])

Ein Gitter lässt sich daher in höherer Ordnung nur eingeschränkt anwenden oder man muss bestimmte Spektralbereiche ausblenden. Der Spektralbereich, den man tatsächlich ausnutzen kann, ergibt sich aus der Abb. 4: Damit eine Spektrallinie ④ der Wellenlänge  $\lambda + \Delta\lambda$  der  $m$ -ten Ordnung eindeutig von der Linie ② der Wellenlänge  $\lambda$  der  $m+1$ -ten Ordnung zu trennen ist, darf das Maximum der Linie ④ höchstens in das letzte Minimum unmittelbar vor das Maximum der Linie ② fallen. Also ist:

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda - \frac{\lambda}{N}$$

und für  $\lambda/N \ll \lambda$  folgt

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} \quad (9)$$

Beispiel:  $m = 1 \rightarrow \Delta\lambda = \lambda$ . Der nutzbare Spektralbereich umfasst  $\lambda + \Delta\lambda = 2\lambda$ . Das gesamte sichtbare Spektrum zwischen 400 nm und 800 nm lässt sich eindeutig zuordnen

## 2 Experimente

### Bestimmung der Gitterkonstanten $g$ (=Abstand der Spalte)

Die Justierung des Spektralapparates ist relativ aufwendig. Halten Sie sich bitte genau an die Anleitung, die Sie am Arbeitsplatz finden. Das Gitter wird zunächst mit einer Na-Dampfampe beleuchtet. Die Wellenlängen des Na-Dupletts liegen bei

$$\lambda_1 = 589,0 \text{ nm},$$

$$\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}.$$

- (M1) Spalt gut ausleuchten, Gitter ① am Arbeitsplatz benutzen, Einfallswinkel  $0^\circ$ . Fernrohr wegschwenken und mit dem Auge die Spektrallinien aufsuchen.
- (M2) Mit dem Fadenkreuz im Fernrohr und dem Goniometer die Spektrallinien vermessen. In den ersten Ordnungen lassen sich die zwei Linien noch nicht trennen. Wenn sich die Linien trennen lassen: Beide Linien bis zur 10. Ordnung auf beiden Seiten vermessen, jedoch nur jede zweite Ordnung.
- (A1) Bestimmen Sie (Gl. (3)) die Gitterkonstante  $g$  als Mittelwert.
- (A2) Bestätigen Sie durch Berechnung des Auflösungsvermögens  $A$ , dass Sie die beiden Na-Linien trennen bzw. nicht trennen konnten. Die Gitterbreite beträgt 15 mm, der Strahldurchmesser 30 mm.

### Nutzbarer Spektralbereich

Ersetzen Sie die Na-Dampfampe durch eine weiße Lichtquelle.

- (M3) Welche Spektren lassen sich eindeutig erkennen und zuordnen?
- (M4) Ab welcher Ordnung überlappen sich die Spektren?
- (A3) Zeichnen Sie wie in Abb. 5 die Spektrallinien in Abhängigkeit vom Ablenkwinkel  $\varphi$  und ordnen Sie die Linien ihrer jeweiligen Ordnung zu. Bestimmen Sie den Überlappungsbereich.

### Gitterspektralapparat

In diesem Teil ersetzen Sie die Weißlichtquelle gegen eine Spektrallampe. Eine Spektraltafel finden Sie am Arbeitsplatz.

- (M5) Messen Sie die Linien auf beiden Seiten bis zur 4. Ordnung aus.
- (A4) Bestimmen Sie mit Hilfe der Gitterkonstante aus Aufgabe (A1) die Emissionswellenlängen.



## Auflösung und anderes Gitter

Das Gitter ② am Arbeitsplatz besitzt eine kleinere Gitterkonstante. Ab welcher Ordnung lassen sich die beiden Na-Linien mit diesem Gitter gut trennen? Lässt sich mit dem Gitter auch noch die 3. Ordnung beobachten?

(M6) Bestimmen Sie die Lagen der beiden Na-Linien auf beiden Seiten jeweils zweimal.

(A5) Wie groß ist die Gitterkonstante  $g$ ?

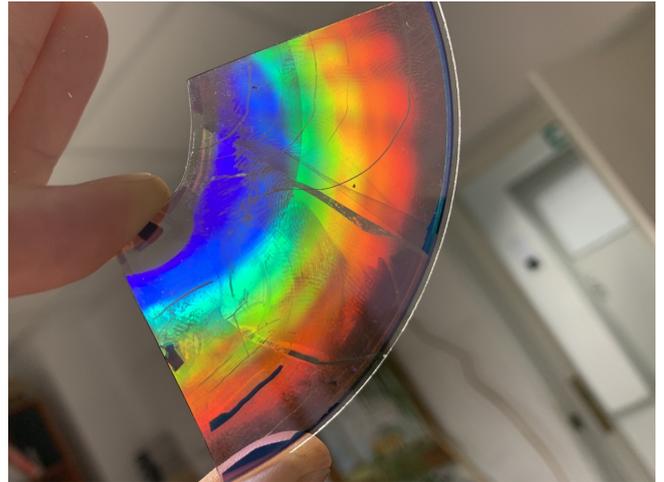
(A6) Wie groß ist das Auflösungsvermögen  $A$ ? Gitterbreite 35 mm, Strahldurchmesser 30 mm.

## Spurabstand

Im Praktikum finden Sie DVD- und CD-Ausschnitte, dessen Reflexionsbeschichtung entfernt wurde. Sie können diese somit in den Spektralapparat einsetzen. Bestimmen Sie den Spurabstand und vergleichen diesen mit den Literaturwerten.

(M7) Nehmen Sie alle Größen zur Bestimmung des Spurabstands auf.

(A7) Wie groß ist der Spurabstand von DVD und CD?



**Abbildung 6:** Das typische Farbenspiel auf einer CD/DVD: Durch die Spuren entsteht ein optisches Gitter. Hier wurde die reflektierende Schicht entfernt, so dass die CD/DVD als Transmissionsgitter im Spektrometer eingesetzt werden kann.

## Literatur

- [1] Bergmann, L.; Schaefer, C.(2002): *Lehrbuch der Experimentalphysik* de Gruyter Verlag
- [2] Demtröder, W.(2013): *Experimentalphysik* Springer Verlag
- [3] Pohl, R.O.(2009): *Einführung in die Physik* Springer Verlag