

## 11. Zur Elektronentheorie der Metalle von P. Drude.

I. Teil.

Dass die Elektrizitätsleitung der Metalle ihrem Wesen nach nicht allzu verschieden von der der Elektrolyte sei, insofern der elektrische Strom durch den Transport kleiner elektrischer Teilchen bewirkt wird, ist eine Anschauung, welche von W. Weber zuerst ausgesprochen und später von Giese<sup>(1)</sup> weiter durchgeführt ist. Ich will diese elektrischen Teilchen im Anschluss an neuere Bezeichnungen *Elektronen*, oder (um einen bequemeren Ausdruck zu haben) *elektrische Kerne*, oder auch kurz Kerne nennen. Den Ausdruck Corpuskeln oder Ionen mochte ich vermeiden, da mit beiden Ausdrücken die Anschauung verbunden ist, dass die elektrischen Teilchen auch eine gewisse, wenn auch sehr kleine ponderable Masse mit sich führen. Ich glaube, es ist zweckmassiger, wenn der Ausdruck „Ionen“ für die Aggregate elektrischer Kerne und ponderabler Masse reservirt bleibt, welche wir in den Elektrolyten antreffen.

...

1) W. Giese, Wied. Ann. 37. p. 576. 1889.

*Quelle:* Paul Drude: Zur Elektronentheorie der Metalle. In: Annalen der Physik. 306, Nr. 3, 1900, S. 566–613,

# Elektrische Leitung in Halbleitern

## Ziele

In diesem Versuch untersuchen Sie elektrische Leitungsvorgänge in Germanium, einem klassischen Halbleitermaterial. Sie untersuchen den Einfluss externer Magnetfelder (Hall-Effekt) und die Auswirkung der Dotierung und der Temperatur. Ihre Messergebnisse werden es Ihnen ermöglichen Merkmale der Halbleiter zu bestimmen, wie die Energielücke zwischen Valenz und Leitungsband.

## Diese Aufgaben müssen Sie vorher *schriftlich* erledigen:

- Stellen Sie die Definition bzw. Bedeutung folgender Begriffe zusammen: Leitfähigkeit, Ladungsträgerbeweglichkeit, Löcher-/Elektronenleitung.
- Beschreiben Sie das Bändermodell der Halbleiter.
- Was heißt n-Dotieren, was heißt p-Dotieren?
- Zeichnen Sie Abb. 4 für einen p-dotierten Halbleiter.
- Was ist der Hall-Effekt? Was sind Hall-Spannung, Hallwiderstand und Hallkonstante?
- Zusatzaufgabe: An welcher Stelle kommen die Begriffe „Pauliprinzip“, „Fermi-Energie“ und „Zustandsdichte“ in die Diskussion der Leitung im Halbleiter.

## Literatur

1. Bergman/Schäfer, Experimentalphysik 6, Festkörper
2. Ashcroft/Mermin, Festkörperphysik
3. Demtröder, Experimentalphysik 3
4. R. Scholz; Praktikumsskript – Hall-Effekt, Leibniz Universität Hannover, 2014

# 1 Grundbegriffe und Bezeichnungen

## 1.1 Ladungsträgerstrom in Metallen

Um 1900 veröffentlichte Paul Drude eine anschauliche Theorie zum Ladungstransport in Metallen. Diese klassische *Elektronengas-Theorie* fußt auf den Newtonschen Axiomen:

(1) Elektronen werden im elektrischen Feld  $E$  durch die Feldkraft  $-eE$  beschleunigt.

(2) Stöße mit den Atomrümpfen führen zu einer Abbremsung. Es sei  $\tau$  die Zeit zwischen zwei Stößen, dann lässt sich dieser Effekt durch eine mittlere Bremskraft  $m_e v / \tau$  beschreiben.

(3) Die Newton'sche Bewegungsgleichung lautet damit  $F = m_e \cdot a = -e \cdot E - m_e \frac{v}{\tau}$ .

Werden die Ladungsträger im Mittel nicht mehr beschleunigt ( $a = 0$ ), ist ein stationärer elektrischer Strom mit einer Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger  $v_D$  erreicht:

$$0 = -e \cdot E - m_e \frac{v_D}{\tau} \Rightarrow v_D = -\frac{e\tau}{m_e} E = -\mu_n E; \text{ hier ist } \mu_e \text{ die so genannte Elektronenbeweglichkeit.}$$

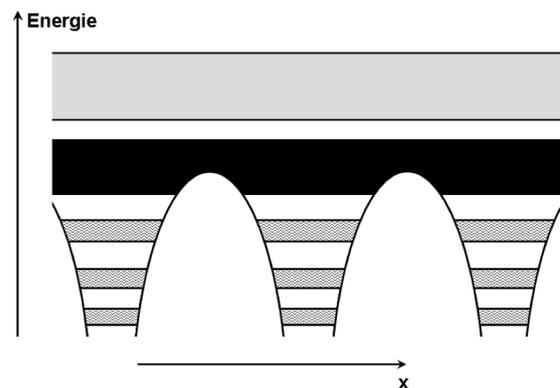
In diesem Modell gilt das *Ohm'sche Gesetz*. Dazu berechnen Sie die Stromdichte aus der Definition  $j = n q v$ :

$$j = -n \cdot e \cdot v_D = n \cdot e \cdot \frac{e\tau}{m_e} E = n \cdot e \cdot \underbrace{\frac{e\tau}{m_e}}_{\sigma} \cdot E = \sigma E. \quad (1)$$

## 1.2 Bändermodell

Diese klassische Drude-Theorie versagt leider quantitativ. Die erst einige Jahre später vorliegende Quantentheorie gibt dafür Gründe:

- Für Elektronen gilt die Fermi-Statistik (Pauli-Prinzip);
- nicht alle Elektronen tragen zur Leitung bei, sondern nur die in der Nähe der sog. Fermi-Energie.



1 Energiebänder beim Festkörper

Das *Bändermodell* bringt Abhilfe:

Abb. 1 illustriert die Modellvorstellung: Die Atomrümpfe bilden im Kristall ein periodisches Coulomb-Potential<sup>1</sup> aus. Da im Kristall eine große Anzahl von Atomen enge beieinander liegen, befinden sich die äußeren Elektronen (Valenzelektronen) nicht mehr in diskreten Zuständen. Die Energiezustände rücken zu quasikontinuierlichen *Energiebändern* zusammen. In Abb. 1 ist schwarz das *Valenzband* (VB) eingezeichnet. Elektronen in diesem Band und erst recht in dem darüber liegenden Energieband sind nicht mehr einzelnen Atomen zugeordnet; sie gehören zum gesamten Kristall. Das Energieband niedrigster Energie mit unbesetzten Elektronenzuständen wird als *Leitungsband* (LB) bezeichnet (grau über dem Valenzband in Abb. 1). Zwischen den Bändern liegen energetisch verbotene Zonen, die sog. *Bandlücken*.

## 1.3 Leiter - Halbleiter - Isolator

**Leiter** Überlappen Leitungsband und Valenzband oder weist das Valenzband freie Elektronenzustände auf, können sich Elektronen im gesamten Kristall (ziemlich) frei bewegen, haben Sie einen Leiter vor sich. Die Dichte  $n_e$  der Leitungselektronen ist mit der Dichte der Atome vergleichbar ( $\approx 10^{23}$  pro  $\text{cm}^3$ ) und ist weitgehend unabhängig von der Temperatur, da keine zusätzliche Energie erforderlich ist, um Elektronen beweglich zu machen.

<sup>1</sup> Amorphe, also nicht kristalline, aber harte Materialien, sind in diesem Zusammenhang keine Festkörper, sondern „harte“ Flüssigkeiten.

**Isolator - Halbleiter** Elektronen sind Fermionen, es gilt das Pauliprinzip. Zwei ununterscheidbare Fermionen dürfen nicht den gleichen quantenmechanischen Zustand einnehmen. Im voll besetzten Valenzband stehen für die Elektronen somit keine freien Energiezustände zur Verfügung. In diesem Band ist kein Ladungstransport möglich. Im energetisch höherliegenden Leitungsband existieren unbesetzte Energiezustände. Wenn durch Energieaufnahme (z. B. thermische Energie) Elektronen dorthin gelangen, sind sie beweglich. Bei Leitern ist der Energieabstand zwischen VB und LB Null oder die Bänder überlappen (s. o.). Ist der Abstand kleiner als etwa 1–2 eV spricht man von *Halbleitern*, ist er größer als 4 eV, hat man gute *Isolatoren*.

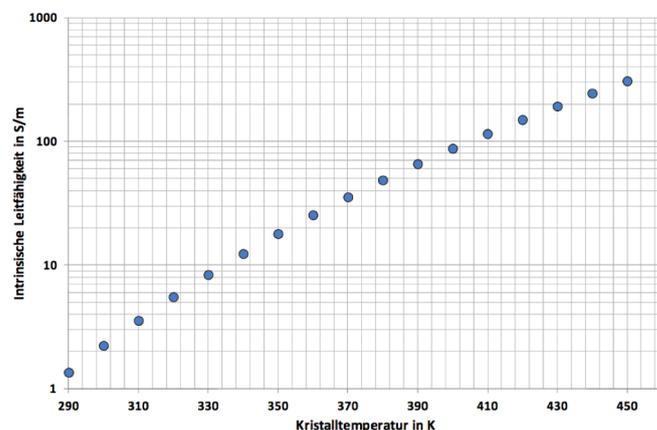
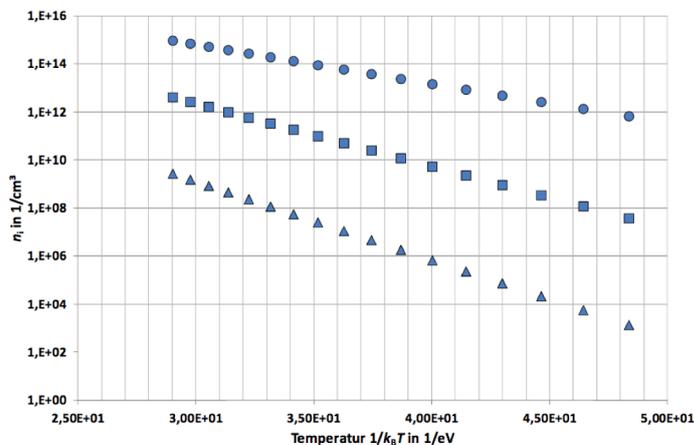
#### 1.4 Intrinsische Leitfähigkeit

In einem einfachen Modell ist der Wert des Produktes der Löcherkonzentration  $p_V$  und der Elektronenkonzentration  $n_L$  gleich dem Produkt aus der Sättigungsdichte für sehr große Temperaturen ( $T \rightarrow \infty$ ),  $n_i^0$ , und der Besetzungswahrscheinlichkeit für endliche Temperaturen. Dieses Vorgehen wird experimentell gut bestätigt. Es gilt mit  $T$  als Kristalltemperatur und  $E_G$  als Energielücke zwischen VB und LB

$$\sqrt{n_L \cdot p_V} = n_i = \underbrace{n_i^0}_{n_i(T \rightarrow \infty)} \cdot \exp\left(-\frac{E_G}{2 \cdot k_B T}\right) \quad (2)$$

Aus Gl. 2 berechnen Sie ohne Schwierigkeiten die elektrische Leitfähigkeit des undotierten Halbleiters ( $n_L = p_V = n_i$ ):

$$\sigma = e \cdot n_i (\mu_n + \mu_p) \approx \sigma_0 \exp\left(-\frac{E_G}{2 \cdot k_B T}\right) \quad (3)$$



- 2 Oben: Intrinsische Ladungsträgerkonzentration (v.o.n.u.: Ge/Si/GaAs);  
Unten: Eigenleitfähigkeit  $\sigma$  von Germanium

Tatsächlich nehmen die Beweglichkeit mit der Temperatur etwas ab, die Sättigungsdichte etwas zu und die Breite der Energielücke etwas ab. Diese Abhängigkeiten kompensieren sich teilweise und bleiben insgesamt schwach; die wesentliche Temperaturabhängigkeit im relevanten Temperaturbereich  $200\text{ K} < T < 500\text{ K}$  steckt in der Exponentialfunktion (Abb. 2).

**Aufgabe 1** Berechnen Sie die Besetzungswahrscheinlichkeit (den Exponentialterm in Gl. 2) für Germanium ( $E_G = 0,67\text{ eV}$ ) für die Temperaturen  $T = 200\text{ K}$ ,  $300\text{ K}$  und  $400\text{ K}$ . Was folgt daraus für die Leitfähigkeit des Materials bei diesen Temperaturen?

**Aufgabe 2** Verwenden Sie Gl. 3, um mit den Gleichgewichtswerten  $n_i(T_0 = 300\text{ K}) = 2,3 \cdot 10^{13}\text{ cm}^{-3}$  und  $\sigma_0(T_0 = 300\text{ K}) = 2,14\text{ A} \cdot (\text{Vm})^{-1}$  die Beweglichkeiten zu bestimmen (die Elektronen sind beweglicher als die Löcher,  $\mu_n \approx 2,05 \cdot \mu_p$ )

**Aufgabe 3** Begründen Sie: Die Ladungsträgerdichte ist beim metallischen Leiter weitgehend unabhängig von der Temperatur.

### 1.5 Extrinsische Leitfähigkeit:

Durch das Einbringen von Fremdatomen (direkt benachbarte Elemente im Periodensystem) lässt sich die Leitfähigkeit gezielt beeinflussen. Durch diese Fremdatome verändern sich die Ladungsträgerdichten, denn die Bandstruktur wird erheblich verändert: Donator-Atome (z. B. As) liefern zusätzliche Elektronenniveaus knapp unter dem Leitungsband (n-Dotierung), Akzeptor-Atome (z. B. Ga) liefern zusätzliche Löcher knapp über dem Valenzband (p-Dotierung). Die jeweilige Konzentration sei mit Großbuchstaben benannt:  $N_d$  für die Dichte der Donatoratome,  $N_a$  für die Dichte der Akzeptoratome.

**Neutralitätsbedingung:** Insgesamt bleiben die Halbleiter natürlich neutral. Beim n-Halbleiter kompensiert die Elektronendichte  $n_L$  im Leitungsband gerade die Summe der Dichten hinterlassener Löcher im Valenzband ( $p_V$ ) und ionisierter Donatoratome  $N_d^+$ :

n-Halbleiter:  $n_L = p_V + N_d^+$ ; sowie weiterhin das Massenwirkungsgesetz  $n_L \cdot p_V = n_i^2$ ;

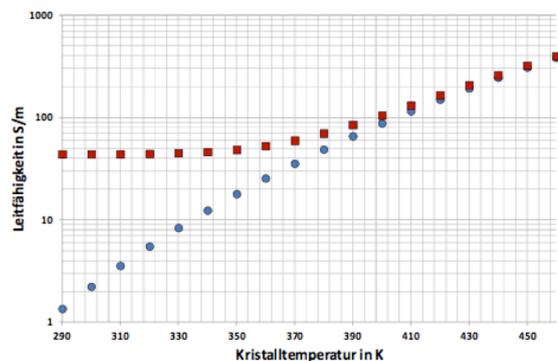
p-Halbleiter:  $p_V = n_L + N_a^-$ ; sowie weiterhin das Massenwirkungsgesetz  $n_L \cdot p_V = n_i^2$ .

Der geringe Energieabstand zur jeweiligen Bandkante und führt dazu, dass schon bei Zimmertemperatur die Donator- bzw. Akzeptorniveaus komplett ionisiert sind ( $N_d^+ \approx N_d$  und  $N_a^- \approx N_a$ ). Daraus berechnen Sie zwei Gleichungen für die Ladungsträgerdichten im n- bzw. p-Halbleiter:

$$\text{n-HL: } \begin{cases} n_L \\ p_V \end{cases} = \frac{1}{2} \left[ N_d^2 + 4n_i^2 \right]^{1/2} \pm \frac{1}{2} N_d; \text{ p-HL: } \begin{cases} n_L \\ p_V \end{cases} = \frac{1}{2} \left[ N_a^2 + 4n_i^2 \right]^{1/2} \mp \frac{1}{2} N_a. \quad (4)$$

**Aufgabe 4** Leiten Sie Gl. 4 her. Starten Sie mit den Neutralitätsbedingungen und lösen Sie auftretende quadratische Gleichungen. Aus Gl. 4 berechnen Sie problemlos die jeweiligen Leitfähigkeiten nach

$$\sigma = e \cdot (n_L \cdot \mu_n + p_V \cdot \mu_p). \quad (5)$$



3 Vergleich der Leitfähigkeit  $\sigma$  von reinem und n-Germanium (rote Quadrate);  $N_d \approx 7 \cdot 10^{14}\text{ cm}^{-3}$ .

Abb. 3 zeigt die Leitfähigkeit von n-Germanium mit einer Donatordichte  $N_d = 7 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  im Vergleich mit undotiertem Germanium nach Gl. 4/5. Deutlich ist zu erkennen, dass für hohe Temperaturen ( $T > 380 \text{ K}$ ) die intrinsische und extrinsische Leitfähigkeit angleichen. Die Ladungsträgerreserve im Valenzband wird bei höheren Temperaturen spürbar.

### 1.6 Hall-Effekt im dotierten Halbleiter

Bewegte Ladungsträger mit der Geschwindigkeit  $v$  werden im Magnetfeld durch die Lorentzkraft abgelenkt. In einer abgeschlossenen Materialprobe wie in Abb. 4 entsteht dadurch ein Ladungsungleichgewicht und damit ein elektrisches Feld  $\mathcal{E}_H$  (das Hall-Feld). Schließlich stellt sich zwischen den Feldkraftbeträgen ein Gleichgewicht ein:

$$F_L = -e \cdot v \cdot B = F_{el} = -e \mathcal{E}_H.$$

**Aufgabe 5** Leiten Sie aus dieser Überlegung und einem sinnvollen Ansatz für die hier auftretende Ladungsträgergeschwindigkeit  $v$  (wie ergibt sich diese aus der Stromstärke  $I$ ) die folgende Gleichung für die messbare Hallspannung  $U_H$  ab:

$$U_H = R_H \frac{I \cdot B}{d}. \text{ Dabei hängt die Hallkonstante von den Halbleiterparametern ab:}$$

$$R_H(\text{Elektronen}) = -\frac{1}{e \cdot n}; R_H(\text{Löcher}) = \frac{1}{e \cdot p}; R_H(\text{Elektronen} + \text{Löcher}) = \frac{1}{e} \cdot \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{(p\mu_p + n\mu_n)^2}$$

Alle drei Bedingungen folgen aus der Forderung, dass die Gesamtstromdichte in Querrichtung (Abb. 4: senkrecht zu  $B$  und  $v_{n,p}$ ) im stationären Fall gleich null wird. Probieren Sie es aus!

## 2 Experimente

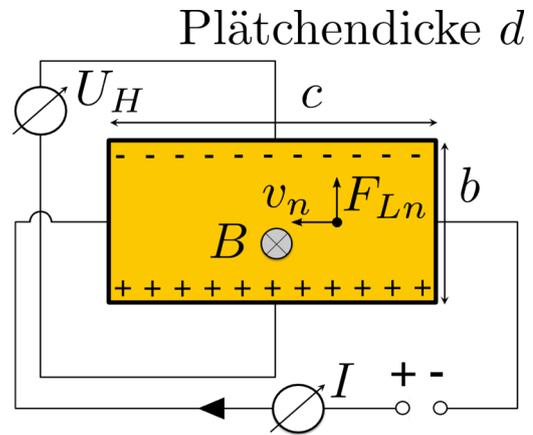
### 2.1 Der Bandabstand $E_G$ bei Germanium

Aufbau nach Abb. 5; gehen Sie sehr vorsichtig mit dem Kristall um, er ist teuer und empfindlich!

Begründen Sie: Aus der Temperaturabhängigkeit von  $\sigma$  (Gl. 3) lässt sich  $E_G$  bestimmen.

#### M1 $\sigma = \sigma(T)$

- Messen Sie den Spannungsabfall  $U$  für zwei verschiedene geringe Stromstärken  $I = 2 \text{ mA}$  und  $I = 3 \text{ mA}$ . Anzeige auf Probenspannung umschalten.
- Heizregler betätigen und Probenspannung  $U = U(T)$  aufnehmen. Variieren Sie die Kristalltemperatur zwischen Zimmertemperatur und maximal  $170^\circ\text{C}$ . Vorsicht beim Anfassen!



4 Aufbau zum Hall-Effekt (n-dotierter Halbleiter) B-Feld zeigt in die Zeichenebene



5 Erster Aufbau: Der Bandabstand bei Germanium

Auswertung: Mit den Kristallmaßen  $c = 20 \text{ mm}$ ;  $b = 10 \text{ mm}$ ;  $d = 1 \text{ mm}$  erhalten Sie aus  $U$  und  $I$  die Leitfähigkeit  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{j}{\mathcal{E}} = \frac{I}{U} \cdot \frac{c}{b \cdot d}.$$

Umformen von Gl. 3 liefert die Temperaturabhängigkeit

$$\ln(\sigma) = \ln(\sigma_0) - E_G \frac{1}{2k_B T}.$$

Tragen Sie nun  $y = \ln(\sigma)$  gegen  $x = 1/(2k_B T)$  auf, so liefert Ihnen ein Linearfit die Steigung  $E_G$ .

## 2.2 Extrinsische und intrinsische Leitfähigkeit

**M2** Wiederholen Sie die Messung M1 für p- und n-Germanium (Stromstärke  $I = 20 \text{ mA}$ ). Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Abb. 3. Geben Sie eine qualitative Begründung für den Verlauf  $\sigma = \sigma(T)$ .

**Zusatzaufgabe** für Zusatzpunkte: Einsetzen von Gl. 4 ind Gl. 5 liefert für n-Germanium

$$\sigma = -e \cdot (n_L \cdot \mu_n + p_V \cdot \mu_p) = -\frac{e}{2} \left[ (\mu_n + \mu_p) \cdot (N_d^2 + 4n_i^2)^{1/2} + N_d \cdot (\mu_n - \mu_p) \right].$$

Rechnen Sie dies nach und bestimmen Sie  $N_d$  bzw.  $N_a$  aus einem Fit Ihrer Messergebnisse mit dieser Formel. Verwenden Sie dabei die bereits gemessene Temperaturabhängigkeit von  $n_i$  und Tabelle 1.

## 2.3 Der Hall-Effekt

In diesem Experiment messen Sie die Hall-Spannung  $U_H$  in Abhängigkeit von der magnetischen Flussdichte  $B$ , der Temperatur  $T$  und dem Probenstrom  $I$  bei n- oder p-Germanium. Bauen Sie das Experiment nach Abb. 6 auf. Achten Sie darauf, dass der Aufbau mit dem Kristall sicher steht und nicht umfällt. Der Kristall ist mechanisch sehr empfindlich.

Für alle Messungen:

- Wechselspannungsausgang des Transformators an die Eingangsbuchsen zur Spannungsversorgung anschließen und Ausgangsspannung auf  $12 \text{ V}$  einstellen.
- Spulen mit dem DC-Netzgerät beschalten und Magnetfeldsensor anschließen.
- Probenstrom  $I$  wählen (max. Probenstrom siehe Bedienungsanleitung zum Ge-Kristall),
- Hallspannung am Basisgerät wählen und mit Kompensationssteller Nullabgleich der Hall-Spannung vornehmen.

### M3.1: $U_H = U_H(I)$

- DC Netzgerät einschalten und als Konstantstromquelle betreiben
- Magnetische Flussdichte  $B$  bzw. Spulenstrom wählen, Hall-Spannung  $U_H$  in Abhängigkeit vom Probenstrom  $I$  aufnehmen  $0 < I < 30 \text{ mA}$ .
- Messkurven:  $U_H = U_H(I)$  zeichnen.



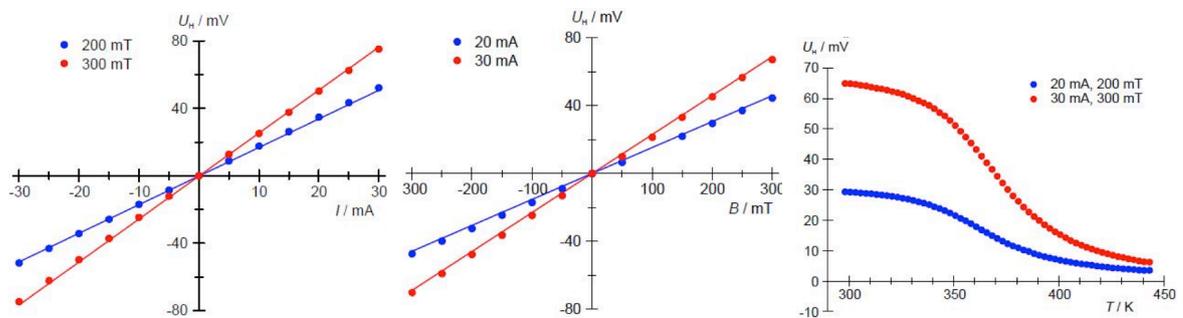
6 Aufbau zum Hall-Effekt

**M3.2:  $U_H = U_H(B)$**

- Konstanten Probenstrom wählen, z.B. 20 mA.
- Magnetische Flussdichte  $B$  durch Änderung des Spulenstrom variieren und zugehörige Hall-Spannung  $U_H$  aufnehmen.
- Messkurven:  $U_H = U_H(B)$  zeichnen.

**M3.3:  $U_H = U_H(T)$**

- Konstanten Probenstrom wählen, z.B. 20 mA.
- Magnetische Flussdichte  $B$  bzw. Spulenstrom wählen.
- Heizregler betätigen und Hall-Spannung  $U_H$  in Abhängigkeit von der Temperatur  $T$  aufnehmen. Es empfiehlt sich die Probe auf  $170^\circ\text{C}$  aufzuheizen und während der Abkühlphase die Hallspannung zu notieren.
- Abhängigkeit von der Temperatur aufnehmen.
- Messkurven:  $U_H = U_H(T)$  zeichnen.



7 Hall-Spannung als Funktion von  $I$ ,  $B$  und  $T$  beim n-Ge

	Silizium	Germanium	GaAs
<b>Bandlücke <math>E_G</math> in eV</b>			
$T = 300\text{ K}$	1,12 eV	0,67 eV	1,42 eV
$T = 0$	1,17 eV	0,78 eV	1,52 eV
<b>Eigenleitdichte</b>			
$n_i$ in $\text{cm}^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{10}$	$2,4 \cdot 10^{13}$	$\approx 1,8 \cdot 10^6$
<b>Eigenleitfähigkeit</b>			
in $\text{Sm}^{-1}$	$4,53 \cdot 10^{-4}$	2,23	$1,43 \cdot 10^{-5}$
<b>Beweglichkeit</b>			
$\mu$ in $\text{cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$			
<b>Elektronen</b>	1450	3900	8500
<b>Löcher</b>	450	1900	400
<b>Effektive Zustandsdichte <math>N</math> in <math>\text{cm}^{-3}</math></b>			
im LB: $N_L$	$2,8 \cdot 10^{19}$	$1,0 \cdot 10^{19}$	$4,7 \cdot 10^{17}$
im VB: $N_V$	$1,04 \cdot 10^{19}$	$6,0 \cdot 10^{18}$	$7,0 \cdot 10^{18}$

Tabelle 1 Allgemein akzeptierte<sup>2</sup> elektrische Halbleiterdaten:

<sup>2</sup> Je nach Kristallstruktur und Messverfahren können Abweichungen auftreten. Die Werte hier entstammen Bergmann/Schäfer; Experimentalphysik Bd. 6