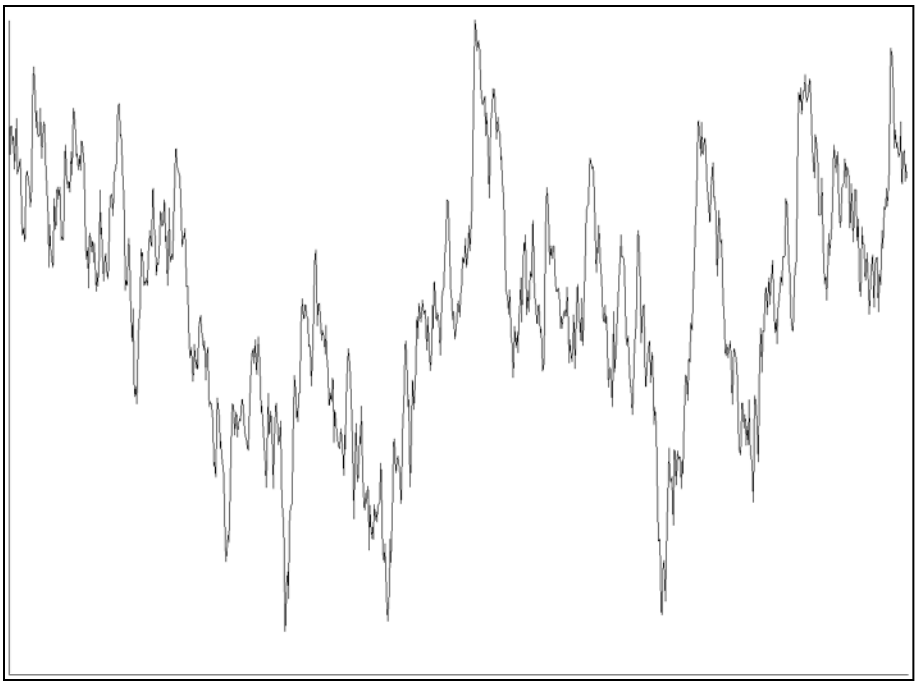


Elektrische Schwankungserscheinungen

Ziele

In diesem Versuch untersuchen Sie elektrische Schwankungserscheinungen. Beginnend bei einfachen periodischen Signalen bis schließlich bei komplexen Rauschsignalen verwenden Sie elektrisches Speicheroszilloskop und Fourieranalyse für die messtechnische Bestimmung von Merkmalen der Signale.

Diese Aufgaben müssen Sie vorher *schriftlich* erledigen:

- Was besagt der Satz von Fourier? Schreiben Sie seine Bedeutung in eigenen Worten auf.
- Was ist ein Fourier-Spektrum?
- Recherchieren Sie: Mit welcher Abtastrate digitalisiert die Soundkarte Ihres Computers?
  Was bekommen Sie dabei über die *Nyquist-Frequenz* heraus? Vergleichen Sie diese mit dem von Menschen hörbaren Frequenzbereich.
- Erklären Sie an einem Beispiel, wozu die Fourier-Analyse verwendet wird.

Literatur

1. Bronstein/Semendjajew; Taschenbuch der Mathematik
2. R. Scholz; Praktikumsskript – Rauschen; Leibniz Universität Hannover, 2013
   R. Scholz; Praktikumsskript - Fourier-Analyse zeitabhängiger Signale;
   Leibniz Universität Hannover, 2014

1 Grundbegriffe und Bezeichnungen

1.1 Der Satz von Fourier

Jede periodische kontinuierliche Funktion kann als Summe von Cosinus- und Sinusschwingungen dargestellt werden. Die *Fourier-Analyse* bestimmt, welche Frequenzanteile mit welcher Amplitude dabei auftreten:

- $f(t)$ sei im Intervall $t_0 < t < t_0+T$ definiert.
- $f(t)$ habe die Periode T: $f(t) = f(t + 2T)$
- $f(t)$ und $\mathrm{d}f(t)/\mathrm{d}t$ seien auf dem Intervall $t_0 < t < t_0+T$ wenigstens stückweise stetig
- $f(t)$ habe auf dem Intervall $t_0 < t < t_0+T$ als einzige Unstetigkeiten nur endlich viele Sprungstellen.

Es sei $f(t)$ eine derartige periodische Funktion der Zeit, dann kann man schreiben:

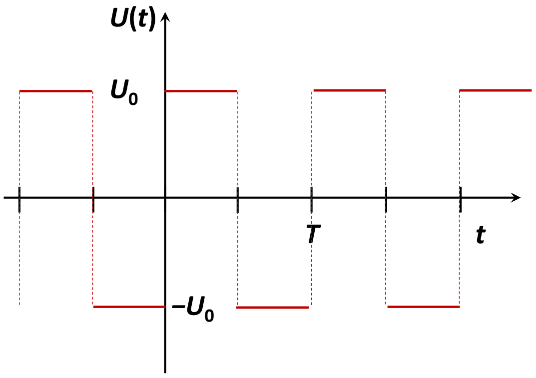
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)\right];\ \omega_n = n\frac{2\pi}{T}$$: Mit den Fourier-Koeffizienten

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{d}t;\ a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\cos(\omega_n t)\,\mathrm{d}t;\ b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\sin(\omega_n t)\,\mathrm{d}t.$$

a_0 entspricht physikalisch dem Signalmittelwert über eine Periode; a_1 bzw. b_1 liefern die so genannte *Grundschwingung*. Die Schwingungen höherer Frequenz werden in der Akustik als *Obertöne* bezeichnet.

Beispiel: Rechteckspannung (Abb. 1)

$$U(t) = \begin{cases} U_0; 0 < t < \frac{T}{2} \\ -U_0; \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$



1 Rechteckspannung

Rechnen Sie nach:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T U(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} U_0\,\mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T} -U_0\,\mathrm{d}t\right) = 0,$$

der Mittelwert ist null - nicht überraschend. Auch die geraden Funktionsanteile sind null:

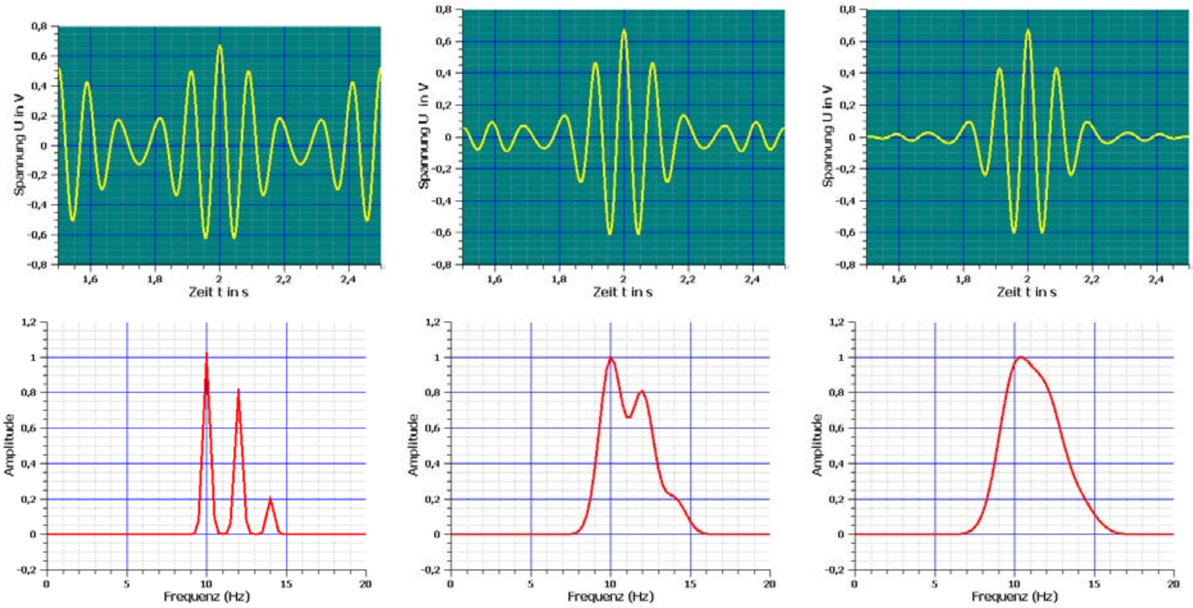
$$a_n = \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} U_0\cdot\cos(\omega_n t)\,\mathrm{d}t - \int_{T/2}^{T} U_0\cdot\cos(\omega_n t)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{2U_0}{T}\frac{1}{\omega_n}\left[\sin(\omega_n t)\Big|_0^{T/2} - \sin(\omega_n t)\Big|_{T/2}^{T}\right] = 0.$$

Die ungeraden Funktionsanteile der Reihe jedoch sind von null verschieden:

$$b_n = \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} U_0\cdot\sin(\omega_n t)\,\mathrm{d}t - \int_{T/2}^{T} U_0\cdot\sin(\omega_n t)\,\mathrm{d}t\right] = -\frac{2U_0}{T}\frac{1}{\omega_n}\left[\cos(\omega_n t)\Big|_0^{T/2} - \cos(\omega_n t)\Big|_{T/2}^{T}\right] = 4\frac{U_0}{n\pi}$$

Die „*Fourierzerlegung*" des Rechtecksignals, das so genannte Fourierspektrum ist also:

$$U(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)\right] = \frac{4U_0}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \ldots\right);\ \omega = \frac{2\pi}{T}.$$



2 Die Verkürzung der Messzeit von $\tau \approx 4$ s über $\tau \approx 1$ s auf $\tau \approx 0{,}4$ s führt zu zunehmender Überlappung der Linien. Das Triplett verschmiert.

Die Analyse liefert nur dann gut definierte Frequenzen, wenn Sie Ihre Sampling-Frequenz ausreichend groß wählen. Auch für die Messzeit τ gibt es eine Regel. Sie darf nicht zu klein gewählt werden. Abb. 2 zeigt: Um einen Frequenzabstand $\Delta f = 2$ Hz sauber auflösen zu können, muss $\Delta f \tau > 1$ sein. Je kleiner τ ist, desto mehr „verschmieren" die *Linien im Fourier-Spektrum*. Für eine Abschätzung der Untergrenze von τ aus der Linienbreite Δf (volle Halbwertsbreite) lässt sich die „Unschärfe-Relation der Fourier-Analyse" verwenden:

$$\Delta f \cdot \tau = 1.$$

Bespiele

Abb. 2 demonstriert eine mögliche Fehlerquelle: Ist die Messzeit zu kurz, werden die Linien nicht getrennt und das Linientriplett wird nicht u. U. nicht erkannt.

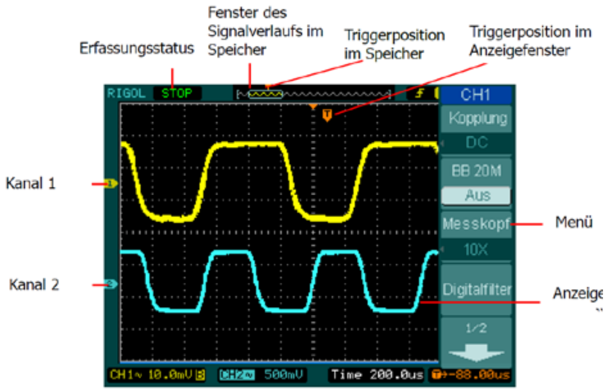
Aufgabe (vorher zuhause!):

- Berechnen Sie, analog zum Beispiel mit der Rechteckspannung, die Fourier-Zerlegung einer Dreieckspannung und einer Überlagerung zweier Cosinus-Spannungen gleicher Amplitude mit den Frequenzen f_1= 10 Hz und f_2 = 15 Hz (nutzen Sie dazu die Linearität der Zerlegung aus).
- Skizzieren Sie die Spektren.
- Mithilfe der Fourier-Analyse soll ein ein Signal zerlegt werden, das aus der additiven Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen mit den Frequenz f_1 = x Hz und f_2 = x + 0.3 Hz besteht. Der interne Speicher Ihres Speicher-Oszilloskops ist auf maximal 8000 Datenpunkte begrenzt. Wie große darf x sein sein, um f_1,und f_2 getrennt darstellen zu können. Die Lösung dieser Aufgabe erfordert die Angabe der Nyquist-Frequenz, der Samplingrate und der Messzeit.

2 Messungen

2.1 Das digitale Speicheroszilloskop

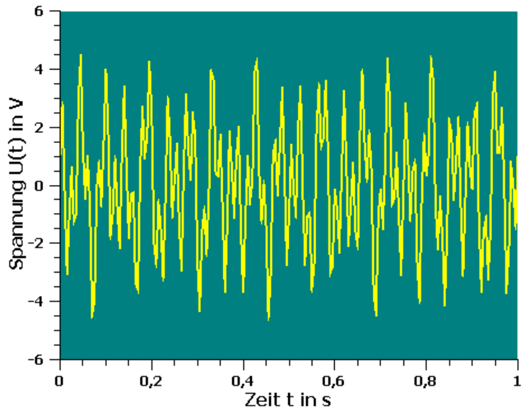
Wahrscheinlich haben Sie bereits mit einem analogen Oszilloskop gearbeitet und zeitlich veränderliche Spannungen analysiert. Bei diesem Experiment wird ein *digitales Speicheroszilloskop* eingesetzt. Diese Geräte wandeln das analoge Signal in digitale Information um (A/D-Wandler) und speichern diese dann zur weiteren Verarbeitung und Darstellung ab. Der große Vorteil digitaler Oszilloskope ist, dass das Signal dauerhaft zur Anzeige oder weiteren Analyse verfügbar ist. Ein Nachteil ist, dass die A/D-Wandlung die Gefahr von Falschdarstellungen der Signale birgt (Aliasing-Effekt).



3 Bildschirmdarstellung des digitalen Speicheroszilloskops

(M1) Machen Sie sich mit den wichtigsten Funktionen des Speicheroszilloskops vertraut.

- Verwenden Sie den Funktionsgenerator zur Erzeugung unterschiedlicher Signalformen.
- Probieren Sie unterschiedliche Frequenzen und Amplituden aus. Finden Sie heraus, wie sich das Gerät in den Bereichen großer Frequenzen ($f \approx 10$ MHz) und kleiner Amplituden verhält. Notieren Sie Ihre Beobachtungen.



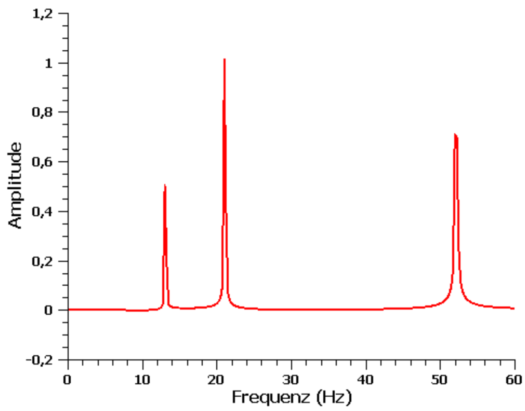
4 Ein komplexes Signal...

2.2 FFT

Unter der Bezeichnung *Fast Fourier Transform (FFT)* sind verschiedene Algorithmen im Einsatz, die eine schnelle diskrete Fouriertransformation ermöglichen. Die Speicheroszilloskope verfügen über einen internen FFT-Rechner.

(M2) Machen Sie sich mit dem FFT-Rechner vertraut, indem Sie die Fouriertransformierte unterschiedlicher Signalformen erzeugen.

- Beginnen Sie mit einfachen Sinus-Schwingungen. Überprüfen Sie den Einfluss der Schwingungsfrequenz und der Amplitude. Entspricht das Ergebnis Ihren Erwartungen?
- Analysieren Sie ein Sinussignal, Rechteck-, Dreieckspannung.



5 ... und das Fourier-Spektrum: Eine Überlagerung dreier Sinusschwingungen der Frequenzen f_1 = 13 Hz, f_2 = ... und f_3 = ... Was kann man über die relativen Amplituden sagen?

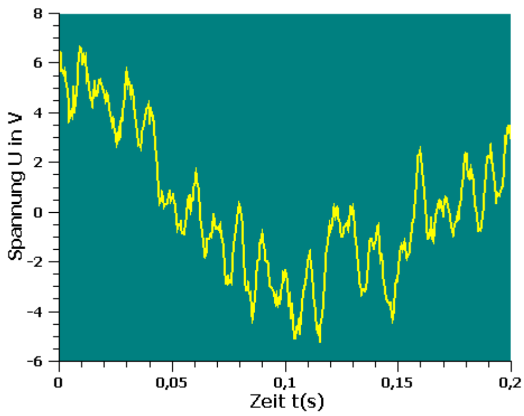
2.3 Rauschen

Abb. 4/5 demonstriert die Stärke der Fourier-Analyse bei der Analyse komplexer Signale.

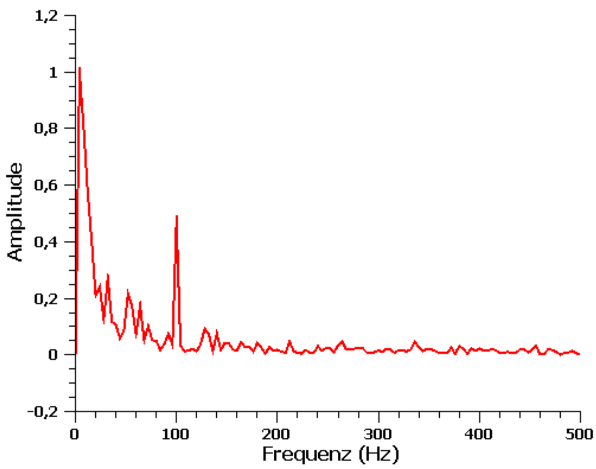
(M3) Mithilfe zweier Funktionsgeneratoren erzeugen Sie eine Überlagerung zweier Sinussignale.

- Nehmen Sie Signal und Fourier-Spektrum auf.
- Das Speicheroszilloskop stellt die Messdaten auch als Textdatei zur Verfügung. In der Form können Sie diese direkt zu Analyse mit qti-Plot verwenden. Versuchen Sie sich an einem Fit des Originalsignals.

Im letzten Experiment analysieren Sie verrauschte Signale. Abb. 6 zeigt eine Beispiel. Eine stark niederfrequent verrauschte 100-Hz-Wechselspannung (Signal/Rausch-Verhältnis < -15 dB). Das Fourier-Spektrum zeigt erheblichen Rauschanteil bei kleinen Frequenzen. Der 100-Hz-Peak ist jedoch auch noch sehr deutlich erkennbar.



Ein verrauschtes (1/*f*-Rauschen) Signal...



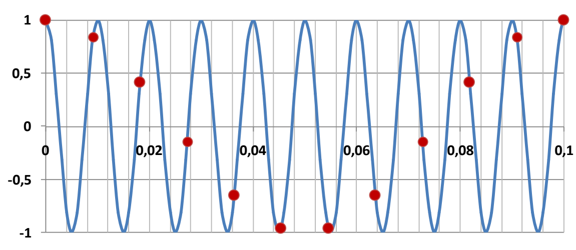
6 ... und das Fourier-Spektrum

(M4) Am Experiment finden Sie eine Sammlung unterschiedlicher stark verrauschter Signale. Ihre Aufgabe ist es, möglichst viel über diese Signale herauszubekommen:

- Finden Sie noch deutliche Hinweise auf Tonsignale, wie in Abb. 6?
- Welche mittlere Frequenzabhängigkeit zeigt das Rauschen, weiß (unabhängig von der Frequenz), rosa ($1/f$), braun ($1/f^2$)?

2.4 Alias-Effekt

Beim Digitalisieren wird die Signalspannung mit einer bestimmten *Samplefrequenz* f_S abgetastet (alle $1/f_S$ Sekunden wird ein Signalwert gemessen und digitalisiert). Das *Nyquist-Shannon-Abtasttheorem* verlangt, dass ein Signal mit einer Maximalfrequenz f_{max} mindestens mit der *Samplingfrequenz* $2 \cdot f_{max}$ abgetastet werden muss, um exakt rekonstruiert zu werden.



7 Zum Alias-Effekt

Ist die Signalfrequenz größer als $f_S/2$, können die Signalwerte nicht mehr eindeutig einer bestimmten Schwingung zugeordnet werden (Alias-Effekt). Die so genannte *Nyquist-Frequenz* ist die maximal ohne Alias-Effekt mögliche Signalfrequenz, die das Speicheroszilloskop verarbeiten kann.

Aufgabe: Schauen Sie sich Abb. 7 an. Sie zeigt 10 Schwingungen einer 100-Hz-Sinusspannug der Amplitude 1 V. Die roten Punkte zeigen die Treffer, wenn diese Spannung mit einer *Samplingfrequenz* von 110 Hz abgetastet wird. Erläutern Sie daran (schriftlich!) den Alias-Effekt. Welche Merkmale (Amplitude, Frequenz) hat die rekonstruierte Wechselspannung?

(M5) Untersuchen Sie experimentell den Alias-Effekt. Wählen Sie Einstellungen am Speicheroszilloskop, die scheinbare niedrige Frequenzen im Signal erzeugen.

2.5 Zur Auswertung

Achten Sie unbedingt auf folgende Merkmale Ihrer Auswertung:

Zu M1: Dokumentieren Sie Ihre Beobachtungen.

Zu M2.1: Dokumentieren Sie Ihre Beobachtungen. Was ändert sich am Spektrum, wenn Sie die Parameter verändern?

Zu M2.2: Berechnen Sie das Fourier-Spektrum aus Ihren Messdaten (txt-Datei aus dem Speicheroszilloskop) mit einem geeigneten Computerprogramm (z. B. qtiPLot) und stellen Sie es sinnvoll dar; geben Sie dazu die Frequenzauflösung direkt an.

Zu M3.1: Wie bei M2.2; versuchen Sie einen regelrechten Funktionsfit mit Ihren Parametern? Vergleichen Sie die Genauigkeit von Spektral- und Fitanalyse

Zu M4.1: Wie M2.2

Zu M.4.2: Warum lassen sich Rauschsignale nicht fitten? Schätzen Sie das Signal/Rausch-Verhältnis ab.

Zu M4.3: Wählen Sie eine geeignete Form der Darstellung, um zwischen rosa und braunem Rausch unterscheiden zu können