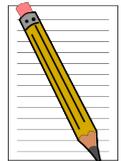


Rückkopplung und Schwingung

Sie werden in diesem Versuch die *Rückkopplung* von Verstärkern als ein Verfahren kennen lernen, die Verluste in elektrischen Schwingkreisen am ohmschen Leitungswiderstand der Spule R_L so auszugleichen, dass stabile Eigenschwingungen entstehen. Um die sehr viel kleineren Verluste im Kondensator geht es in diesem Versuch nicht.

Schriftliche VORbereitung:

- Leiten Sie die Formeln für ω_0 ; $Z(\omega_0)$ und ω_R ; $Z(\omega_R)$ in den Gleichungen (1) und (2) her.
- Bearbeiten Sie Aufgabe 1 auf Seite 4.
- Bearbeiten Sie Aufgabe 2 auf Seite 5.
- Überlegen Sie sich Details zu der Messung und Auswertung des Parallelschwingkreises vor dem Experimentiertag (Siehe S. 5).



1 Verluste in elektrischen Schwingkreisen

Im Resonanzfall wird die Schwingkreis-Impedanz $Z(\omega)$ ohmsch. Daraus ergibt sich beim **Serienkreis** die von R_L unabhängige Resonanzfrequenz ω_0 („i“, nicht kursiv, ist die imaginäre Einheit; i, kursiv steht für die Stromstärke):

$$Z(\omega_0) = Z_R + Z_L + Z_C = R_L + i\omega_0 L + \frac{1}{i\omega_0 C} \in \mathbb{R} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; Z(\omega_0) = R_L. \quad (1)$$

Für den **Parallelkreis** gilt ganz analog (zur Unterscheidung wird hier ω_R statt ω_0 verwendet):

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z(\omega_R)} &= \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_R + Z_L} = i\omega_R C + \frac{1}{i\omega_R L + R_L} \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \omega_R &= \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R_L^2}{L^2}} = \sqrt{\omega_R^2 - \frac{R_L^2}{L^2}}; Z(\omega_R) = \frac{L}{R_L \cdot C}. \end{aligned} \quad (2)$$

Hier sehen Sie zwei wichtige Unterschiede zwischen Serien- und Parallelkreis:

- Die Resonanzfrequenz hängt beim Parallelkreis vom Verlustwiderstand der Spule ab: $\omega_R < \omega_0$.
- Die Impedanz des Parallelkreises hängt auch im Resonanzfall von L und C ab.

Was bedeutet „Rückkopplung“?

Rückkopplung bedeutet, dass das Ausgangssignal u_a wieder am Verstärkereingang eingekoppelt wird, nachdem es ein Rückkopplungsnetzwerk durchlaufen hat: Eine Eingangsspannung u_e wird mit dem Faktor A verstärkt, $u_a = A \cdot u_e$. u_a wird nun auf ein Rückkopplungsnetzwerk k (L -, C -, R -Bauteile, Quarz, Tunnelodiode) gegeben. Zwischen den Punkten x und z liegt danach die Spannung: $k \cdot u_a = k \cdot A \cdot u_e$.

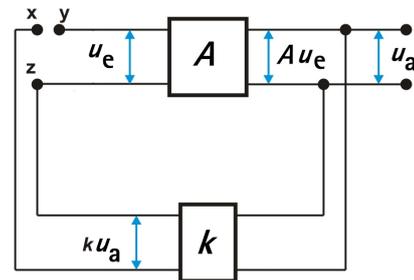


Abbildung 1: Rückkopplung

2 Der Verstärker

Sowohl im Verstärker A als auch im Rückkopplungsnetzwerk k kommt es im Allgemeinen zu Phasenverschiebungen zwischen dem jeweiligen Eingangs- und dem Ausgangssignal. Wenn allerdings die Spannungen u_e und $k \cdot A \cdot u_e$ in Phase sind, kann die rückgekoppelte Spannung das Eingangssignal verstärken; man spricht von *positiver Rückkopplung* (oder Mitkopplung). Angenommen wir verbinden jetzt die Punkte x und y in Abb. 1. Das rückgekoppelte Signal wird nun zum Eingangssignal. Ist $|k \cdot A| < 1$, dann ist auch $|k \cdot A \cdot u_e| < |u_e|$, und das Ausgangssignal wird kleiner, weil nicht genügend Spannung zurückgekoppelt wird. Ist andererseits $|k \cdot A| > 1$, so schaukelt sich das System auf – wohin auch immer. Nur für den Fall $|k \cdot A| = 1$ kann sich ein stationärer Zustand einstellen.

Abb. 2 zeigt den Verstärker, den Sie in diesem Versuch verwenden. Es handelt sich um einen Operationsverstärker in Elektrometerschaltung. Hier nicht eingezeichnet sind die Zuleitungen für die Versorgungsspannung. Die Verstärkung A dieses Verstärkers (s. auch Versuch C04) wird im Idealfall nur von dem Verhältnis der Widerstände R_1 und R_N bestimmt:

$$A = \frac{u_a}{u_e} = 1 + \frac{R_1}{R_N}. \quad (3)$$

Wird als Spannungsteiler $R_1 - R_N$ ein Drehpotentiometer verwendet, ist A stufenlos einstellbar.

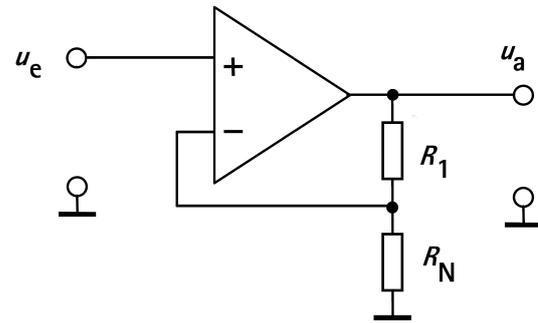


Abbildung 2: Operationsverstärker als Elektrometerverstärker

(M1) **Test des Operationsverstärkers:** Bauen Sie einen Elektrometerverstärker mit dem Verstärkungsfaktor $A = 20$ auf (Abb. 2). Führen Sie einen Test Ihrer Schaltung durch: Bestimmen Sie R_1 und R_N mit einem Multimeter. Das Spannungsverhältnis $A = u_a/u_e$ bestimmen Sie mit dem Oszilloskop. Als Eingangssignal (u_e in Abb. 2) können Sie eine Sinusspannung geeigneter Frequenz und Amplitude verwenden.

(A1) Ist Gl. (3) erfüllt?



Abbildung 3: Das Bild zeigt einen Röhrenempfänger (ca. 1925; Fa. Radiofrequenz GmbH, später Loewe-Radio GmbH); damit das Gerät für den Fernempfang tauglich war, wurde eine Rückkopplung eingebaut. Das Ausgangssignal des Schwingkreises wurde verstärkt und ein einstellbarer Teil der Ausgangsspannung des Verstärker wieder dem Schwingkreis zugeführt. Auf diese Weise lies sich die Güte des Schwingkreises deutlich erhöhen. Allerdings konnten so auch eigenständige Schwingungen erzeugt werden und das Gerät gab laute störende Pfeifgeräusche ab.

3 LC-Oszillator mit Serienschwingkreis

Der Serienschwingkreis ergibt ein *resonanzfähiges Rückkopplungsnetzwerk* (Abb. 4). Die Rückkopplung wird dabei durch den Strom durch das Netzwerk vermittelt. Denn die Eingangsspannung des Verstärkers ist der mit dem Strom phasengleiche Spannungsabfall $u_e = i \cdot R_e$ („ i “ ist die Stromstärke!) am Widerstand R_e .

Im Resonanzfall ist die Impedanz des Kreises rein ohmsch und u_a und u_e sind damit in Phase.

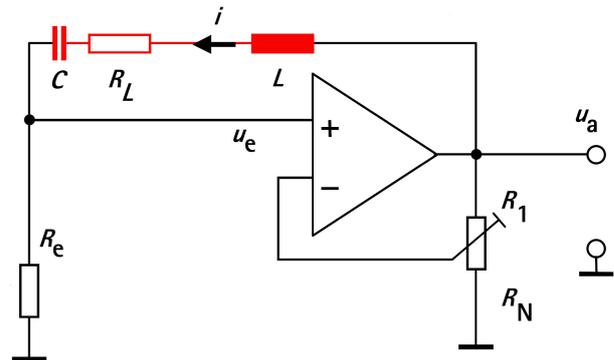


Abbildung 4: LC-Schwinger mit Reihenschwingkreis

Aufgabe 1 (vorher zu Hause): Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm zu $u_a = i \cdot R_e + u_C + i \cdot R_L + u_L$ (Maschenregel) und zeigen Sie die Richtigkeit dieser Behauptung. Zeigen Sie weiter, dass sich daraus Bedingungen für eine stationäre Schwingung ergeben (Resonanzfrequenz ω_0 , A_{min} kompensiert gerade eben die Spulenverluste):

$$u_C + u_L = 0 \Rightarrow A_{min} = 1 + \frac{R_L}{R_e} \quad (4)$$

$$Z_L = -Z_C \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (5)$$

$$Z(\omega_0) = R_L \quad (6)$$

Aus den Gln. (5) und (6) ergeben sich zwei Konsequenzen, die Sie hier experimentell überprüfen:

1. Die Resonanzfrequenz ω_0 ist allein durch L und C bestimmt und hängt nicht von R_L ab.
2. Aus Gl. (3) und Gl. (4) kann der wirksame Spulenwiderstand R_L bestimmt werden:

$$A_{min} = 1 + \frac{R_1}{R_N} \Big|_{min} \quad \text{und} \quad A_{min} = 1 + \frac{R_L}{R_e} \Rightarrow R_L = R_e \cdot \frac{R_1}{R_N} \Big|_{min} .$$

Experimente: Resonanzfrequenz ω_0 und wirksamer Spulenwiderstand R_L im Serienkreis Nach der Theorie wird die Resonanzfrequenz allein von L und C bestimmt ($\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$). Wie gut ist diese Vorhersage erfüllt? Im Experiment vergrößern Sie R_L durch die Widerstände R_D der Widerstandsdekade und untersuchen das Schwingverhalten für unterschiedliche $R_L^* = R_L + R_D$.

Messparameter: $R_e = 200 \Omega$; R_1/R_N ist über ein 10 k Ω -Potentiometer einstellbar; $L = 4,7 \text{ mH}$; die verfügbaren Werte für C finden Sie am Arbeitsplatz.

- (M2) Bestimmen Sie $R_L(\omega = 0)$ mit dem Multimeter.
- (M3) Wählen Sie $R_D = 0$ und fünf verschiedene Werte $1 \text{ nF} < C < 1 \mu\text{F}$; bestimmen Sie damit jeweils die Werte von $R_1(min)$ und $R_N(min)$, für die die Schwingung gerade einsetzen und bestimmen Sie ω_0 .
- (M4) Mit $C = 0,1 \mu\text{F}$ messen Sie ω_0 als Funktion von R_D ($0 \Omega < R_D < 10 \text{ k}\Omega$; 3 bis 4 verteilte Messpunkte in jeder Dekade); stellen Sie A so ein, dass der Verstärker nicht in die Sättigung gerät (woran sehen Sie das?).

Auswertung:

- (A2) Wählen Sie eine angemessene Darstellung Ihrer Messwerte aus (M3) um $\omega_0 = \omega_0(C)$ zu prüfen. Welchen Exponenten α ergibt die nichtlineare Regression $\omega_0 = (L \cdot C)^\alpha$. Ist α mit der Theorie vereinbar?

(A3) Stellen Sie den Zusammenhang $\omega_0 = \omega_0(RD)$ grafisch dar. Bestimmen Sie daraus, bis zu welchem Wert von R_D Ihr Ergebnis mit der theoretischen Vorhersage $\omega_0 = \text{const.}$ vereinbar ist (Toleranz 5 %).

LC-Oszillator mit Parallelschwingkreis

Auch die Parallelschaltung eines Kondensators C und einer Spule L ergibt ein resonanzfähiges Rückkopplungsnetzwerk. Hier vermittelt die Spannung u_C am Netzwerk die Rückkopplung. Denn diese ist gerade die Eingangsspannung des Verstärkers.

$$u_e = u_C = \frac{Q_c}{C} \quad (7)$$

Zusammen mit der Knotenregel können Sie, analog zum Serienkreis, Bedingungen für eine stationäre Schwingung ableiten:

Die Resonanzfrequenz ω_R stellt sich ein, wenn bei $A = A_{min}$ gerade die Verluste kompensiert werden:

$$A_{min} = 1 + \frac{R_L \cdot R_K \cdot C}{L} \quad (8)$$

$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R_L^2}{L^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R_L^2}{L^2}} < \omega_0 \quad (9)$$

$$Z(\omega_R) = \frac{L}{R_L \cdot C} \quad (10)$$

Auch hier ergeben sich experimentell zu überprüfende Konsequenzen:

1. Die Minimalverstärkung A_{min} hängt hier, anders als beim Serienkreis, von L und C ab.
2. Anders als beim Serienkreis existiert eine Obergrenze für den zulässigen Spulenwiderstand R_L , die von der Wahl der Größen L und C abhängt.

Aufgabe 2 Begründen Sie: Aus Gl. (9) folgt $R_L < \sqrt{\frac{L}{C}}$. Rechnen Sie nach: Für $L = 4,7 \text{ mH}$ und $C = 100 \text{ nF}$ gilt $RL < 217 \Omega$?. Was geschieht im Fall $RL \geq 217 \Omega$?

Experimente: Dieser Versuchsteil hat einen erhöhten Schwierigkeitsgrad: Sie müssen sich Details der Messung und Auswertung vor dem Experimentiertag zu Hause überlegen. Aufbau, Messungen und Auswertungen ähneln allerdings dem Experiment zum Serienkreis.

Die Theorie sagt, dass die Resonanzfrequenz neben L und C von R_L bestimmt wird ($\omega_R = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R_L^2}{L^2}}$). Wie gut ist diese Vorhersage erfüllt? Im Experiment vergrößern Sie R_L wieder durch Widerstände der Widerstandsdekade R_D und untersuchen das Schwingverhalten für unterschiedliche $R * L = RL + RD$. Variieren Sie dabei $R_D : 0 \rightarrow 200 \Omega$ und wählen Sie $C = 100 \text{ nF}$ (Wie kommt man auf diese Werte?).

(M5) Bestimmen Sie $\omega_R = \omega_R(R_L^*)$.

(A4) Stellen Sie den Zusammenhang graphisch dar.

(A5) Beschreiben Sie ein geeignetes Messverfahren ($R_k = 200 \Omega$, $L = 4,7 \text{ mH}$, $C = 100 \text{ nF}$).

(M6) Testen Sie Gl. (9) ($L = 514,7 \text{ mH}$) durch geeignete Werte von C und eine geeignete Variation von R_L^* .

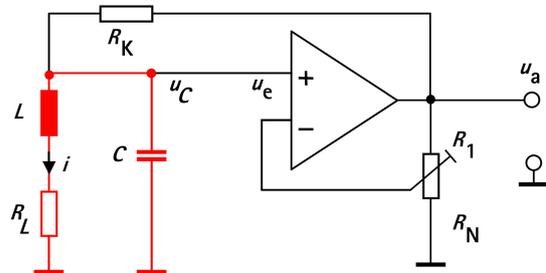


Abbildung 5: LC-Schwinger mit Parallelschwingkreis

(M7) Weisen Sie nach, dass die minimale Verstärkung A_{min} von L und C abhängt, wie von Gl. (8) behauptet. Wählen Sie dazu geeignete Messparameter.

(A6) Stellen Sie jeweils Ihre Messwerte und die theoretische Vorhersage aus (M6) und (M7) graphisch dar. Wie gut ist die Vorhersage erfüllt?

Theoretischer Anhang

Reihenschwingkreis

Bezugsgröße ist der Strom durch das Netzwerk. Die Stromstärke i durch alle Bauteile ist bei einer Reihenschaltung identisch. Schreiben Sie also die Spannungen der Masche in ihrer Abhängigkeit von i auf:

1. Maschenregel für den Rückkopplungsweig: $u_a = i \cdot R_e + u_C + i \cdot R_L + u_L$.

2. Verstärkerwirkung: $u_a = A \cdot u_e = A \cdot i \cdot R_e$.

3. Def. der Kapazität und der Induktivität: $u_C = \frac{Q_C}{C} \Rightarrow \frac{\partial u_C}{\partial t} = \frac{1}{C} \frac{\partial Q_C}{\partial t} = \frac{i}{C}$; $u_L = L \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$.

3. und 2. in 1. einsetzen:

$$A \cdot i \cdot R_e = i \cdot R_e + \frac{Q_C}{C} + i \cdot R_L + L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow A \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \cdot R_e = \frac{\partial i}{\partial t} \cdot R_e + \frac{1}{C} \frac{\partial Q_C}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial t} \cdot R_L + L \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \Rightarrow \quad (11)$$

$$0 = \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \frac{1}{L} \cdot (R_e - A \cdot R_e + R_L) \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot i.$$

Gl. (11) beschreibt die gedämpfte Schwingung der Stromstärke i . Der zweite Term auf der rechten Seite bewirkt die Dämpfung (proportional zu ersten Ableitung). Für die stationäre Schwingung muss $A = A_{min}$ so eingestellt werden, dass $(R_e - A_{min} \cdot R_e + R_L) = 0$ gilt: $A_{min} = 1 + \frac{R_L}{R_e}$. Damit vereinfacht sich die DGL zu $\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \frac{i}{L \cdot C} = 0$ mit der Lösung $i(t) = I_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$; $\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$:

$$u_a = A - min \cdot u_e = A_{min} \cdot i(t) \cdot R_e = \left(a \cdot \frac{R_L}{R_e} \right) \cdot i(t) \cdot R_e = I_0 \cdot (R_e + R_L) \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Parallelschwingkreis

Bezugsgröße ist der Spannung am Netzwerk. Schreiben Sie also alle Ströme am Knoten in Abhängigkeit von der Spannung u_C auf:

4. Knotenregel für den Rückkopplungsweig: $i_K = i_C + i$.

5. Verstärkerwirkung: $i_K = \frac{u_a - u_C}{R_K} = u - C \cdot \frac{(A - 1)}{R_K}$.

6. Def. der Kapazität und der Induktivität: $u_C = \frac{Q_C}{C} \Rightarrow \frac{\partial u_C}{\partial t} = \frac{1}{C} \frac{\partial Q_C}{\partial t} = \frac{i_C}{C}$; $u_L = L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + i \cdot R_L$.



6. und 5. in 4. einsetzen:

$$\begin{aligned}
 u_C \cdot \frac{(A-1)}{R_K} &= C \cdot \frac{\partial u_C}{\partial t} + i \Rightarrow i = u_C \frac{(A-1)}{R_K} - C \cdot \frac{\partial u_C}{\partial t} \\
 u_C &= L \frac{\partial i}{\partial t} + i \cdot R_L = L \left(\frac{\partial u_C}{\partial t} \cdot \frac{(A-1)}{R_K} - C \cdot \frac{\partial^2 u_C}{\partial t^2} \right) + \left(u_C \cdot \frac{(A-1)}{R_K} - C \cdot \frac{\partial u_C}{\partial t} \right) \cdot R_L \Rightarrow \quad (12) \\
 0 &= L \cdot C \cdot \frac{\partial^2 u_C}{\partial t^2} + \left(R_L \cdot C - \frac{L \cdot (A-1)}{R_K} \right) \cdot \frac{\partial u_C}{\partial t} + \left(1 - R_L \frac{(A-1)}{R_K} \right) \cdot u_C.
 \end{aligned}$$

Gl. (12) ist die DGL für eine gedämpfte Schwingung der Eingangsspannung $u_e = u_C$. Für die stationäre Schwingung muss gelten $\left(R_L \cdot C - \frac{L \cdot (A_{min} - 1)}{R_K} \right) = 0$ und damit $A_{min} = 1 + \frac{R_L \cdot R_K \cdot C}{L}$. Die DGL vereinfacht sich zu $\frac{\partial^2 u_C}{\partial t^2} + \left(\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R_L^2}{L^2} \right) \cdot u_C = 0$ mit der Lösung:

$$u_C(t) = U_0 \cdot \sin(\omega_R t + \varphi); \quad \omega_R = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R_L^2}{L^2}}.$$

Literatur

- [1] Lehrbücher (auch Schulbücher der Sek. II): *Stichpunkte: Schwingkreise, Meißner-Schaltung*
- [2] Portis, A.M.; Young, H.D. (1980): *Berkeley Physik Kurs 6, Physik und Experiment* Vieweg Verlag
- [3] Tietze, U.; Schenk, C. (2012): *Halbleiter-Schaltungstechnik* Springer Verlag