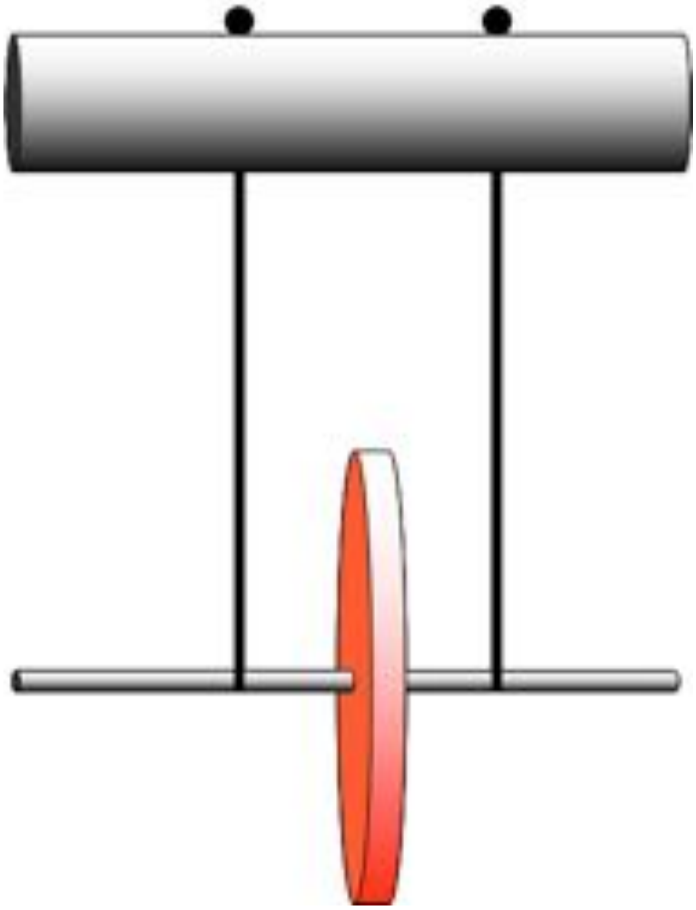


Das MAXWELLsche Rad

Ziele

In diesem Experiment untersuchen Sie fundamentale Bewegungsformen wie Translation und Rotation, die verknüpften Erhaltungssätze wie die Energieerhaltung und die wesentlichen Bewegungsgrößen wie Trägheitsmomente und Drehmomente. Das „Hantelmodell“ ist zentral für jede mechanische Konstruktion und gilt in die Quantenphysik der Atome.

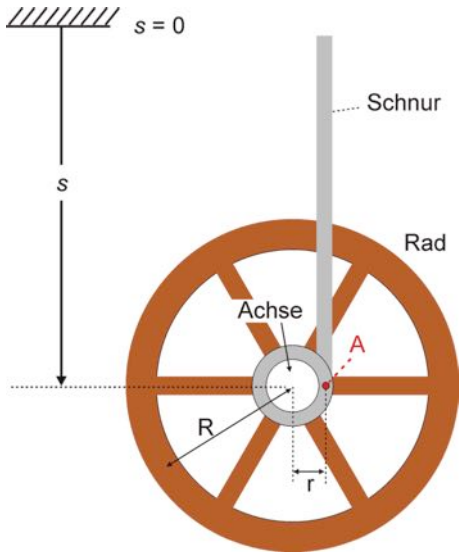
Eigentlich ist das Maxwellrad das bekannte „Jojo“: In einer Scheibe steckt eine Achse, um die sich die Scheibe dreht und dabei Haltefäden auf-, bzw. abwickelt.

Das sollten Sie wissen

- Welche Bewegungsgrößen beschreiben die *Rotationsbewegung?*
- Was sind Trägheitsmoment, Drehmoment, Drehimpuls? Wie hängen die diese Größen zusammen?
- Was besagt der Satz von Steiner?
- Formulieren Sie formal den Energieerhaltungssatz für Rotationsbewegungen.

1 Grundlagen

Das Maxwellsche Rad dreht sich, während es mit der Geschwindigkeit v nach unten fällt, um die in Abb. 1 skizzierte Drehachse A (etwa in der Mitte des Fadens). Im Versuch arbeiten Sie mit zwei Stoppuhren:. Mit dem Digitalzähler in Abb. 2 messen Sie die Fallzeit t für die Fallstrecke s. Er wird mit einem Drahtauslöser oben gestartet und von der Gabellichtschranke, die sich in der Höhe verschieben lässt, unten gestoppt. Die Gabellichtschranke selbst misst außerdem noch die Zeit Δt für den Achsendurchlauf. Daraus können Sie Geschwindigkeit v nach dieser Fallstrecke s bestimmen.



1 Zur Geometrie des Maxwellschen Rades

2 Aufgaben und Fragen

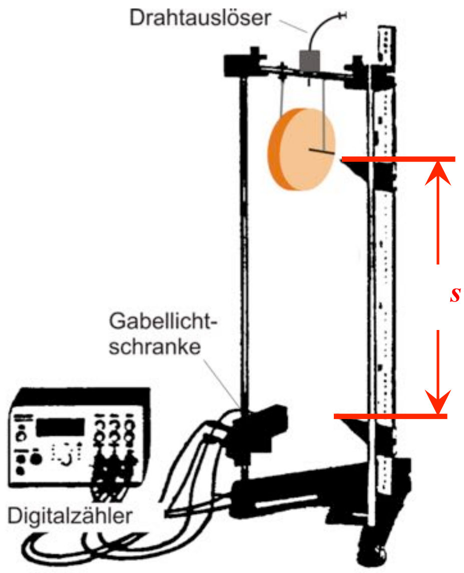
(Alle Aufgaben vorher, zuhause bearbeiten!)

(A1) Welchen Zusammenhang gibt es hier zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω des Rades und der Translationsgeschwindigkeit v seines Schwerpunktes?

$$v = \ldots \tag{1}$$

(A2) Wie groß ist das Drehmoment M, das auf das Maxwellsche Rad wirkt? Welche Größen müssen Sie messen, um das Drehmoment berechnen zu können?

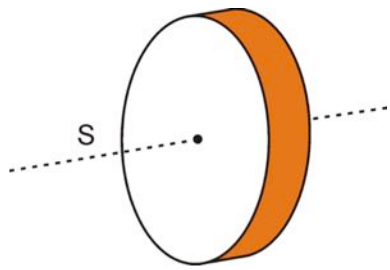
$$M = \ldots \tag{2}$$



2 Der Versuchsaufbau

(A3) Für Kreisscheiben (Zylinder), wie sie hier im Versuch als Maxwellsches Rad benutzt werden, lässt sich das Trägheitsmoment J_S bzgl. der Rotationssymmetrieachse S direkt angeben (R: äußerer Radius; d: Dicke der Scheibe; m: Scheibenmasse, ρ: Dichte des Scheibenmaterials)

$$J_S = \ldots \tag{3}$$



3 Zu Gl. 3

(A4) In dem Versuch dreht sich das Rad (leider) nicht um seine Symmetrieachse S, sondern um die dazu parallel versetzte Achse durch A (s. Abb. 2). Berechnen Sie das Trägheitsmoment J_A, aus J_S kennt?

$$J_A = \ldots \tag{4}$$

(A5) Welcher Zusammenhang besteht bei jeder Drehbewegung zwischen Drehmoment M und Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$? Auf welche Drehachse ist in dieser Beziehung das Trägheitsmoment bezogen?

$$M = \ldots \tag{5}$$

(A6) Mit diesen Überlegungen können Sie die Schwerpunktsbeschleunigung der Scheibe berechnen (r ist der Radius der Achse):

$$M = \left| r \times F \right| = r \cdot m \cdot g = I_A \dot{\omega}$$

$$\ddot{s} = \frac{1}{1 + \frac{R^2}{2r^2}} \cdot g \qquad (6)$$

Schreiben Sie die Zwischenschritte auf dem Weg zu Gl. 6. auf.

Das Maxwellsche Rad fällt also beschleunigt (das wussten Sie wohl auch schon vorher), und die Beschleunigung ist kleiner als g und konstant, wenn man von Reibungseffekten absieht.

(A7) Zum Energiesatz

- Leiten Sie Gl. 6 aus dem Energiesatz ab.
- Wie könnten Sie den Energieverlust des Systems durch Reibung experimentell bestimmen?
- Diese Reibungsverluste gleicht man beim Jo-Jo dadurch aus, dass man es am unteren Umkehrpunkt nach oben zieht und um die gleiche Strecke beim Aufrollen wieder absenkt. Können Sie das erklären?

3 Messungen mit einer der Kreisscheiben

(M1) Messen Sie jeder 2mal die beiden Zeiten für

- 3 verschiedene Fallstrecken $s < 10$ cm und
- 3 verschiedene Fallstrecken $s > 10$ cm.

(M2) Bestimmen Sie den effektiven Abrollradius r_{eff}, indem Sie den Höhenunterschied Δs für 10 Umdrehungen messen: $\Delta s = 10 \cdot 2\pi r_{\text{eff}}$

(M3) Wiegen Sie das Rad, messen Sie den Radius R und die Dicke d an mehreren Stellen. Messen Sie auch Durchmesser und Länge der Achse und Fadendicke.

(M4) Wiederholen Sie die Messungen nach (M1) für ein zweites Rad. Diesmal brauchen Sie nur das Rad zu wiegen und den Achsendurchmesser zu messen.

4 Auswertung, Ergebnisse

(E1) Zeichnen Sie die Graphen für $s = s(t); v = v(t)$ und $s = s(t^2)$. Tragen Sie die Messunsicherheit als Fehlerbalken ein.

(E2) $s = s(t^2)$ ist eine linearisierte Darstellung. Bestimmen Sie die Beschleunigung $\ddot{s} = a$ mit Hilfe von jeweils einem linearen Fit (zum Beispiel mit QTI-Plot) für $s = s(t^2)$ und $v = v(t)$. Schätzen Sie die Unsicherheit von a ab.

(E3) Berechnen Sie nach Gl. 6 die Beschleunigung $\ddot{s} = a$ mit den gemessenen Werten für r_{eff} und R. Wie gut stimmt dieser Wert mit dem Ergebnis (E2) überein?

(E4) Benutzen Sie die experimentell ermittelte Beschleunigung a aus (E2) um den effektiven Radius zu bestimmen. Aus Gl. 6 folgt $r_{\text{eff}}^2 \approx \frac{a \cdot J_S}{g \cdot m} \cdot \left(1 + \frac{a}{g}\right) \approx \frac{a \cdot J_S}{g \cdot m}$. Vergleichen Sie den hier bestimmten, effektiven Radius mit Ihrer Messung aus (M2). Drücken Sie die Abweichung relativ zur Fadendicke aus.

(E5) Schätzen Sie das Verhältnis des Trägheitsmomentes der dünnen Achse zum Trägheitsmoment der Schwungscheibe ab: Kann man das Trägheitsmoment der Achse vernachlässigen? Gilt das auch für die Masse der Achse?

(E6) Stellen Sie W_{Pot}, W_{Rot} und W_{Gesamt} gemeinsam in *einem* Plot als Funktion der Zeit dar. Deuten Sie den Verlauf mit Hilfe des Energiesatzes.

(E7) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment für das zweite Rad (M4) aus Ihren Messungen: $J_S = \frac{r_{eff}^2 \cdot g \cdot m}{a}$.

Spezielle Hinweise zum Experimentieren

(A) Zum Digitalzähler

Tasten: ms, Timer und ⌉⌊⌉⌊ einstellen

Messen:
1. Den Drahtauslöser spannen
2. Das Rad am Dorn einhängen
3. Am Digitalzähler
   zuerst Taste RESET
   dann Taste START drücken
4. Drahtauslöser entspannen.

(B) Kraft auf Gestänge im Umkehrpunkt, beim Maxwellrad

Ansatz mit Impulsumkehr:

v: Geschwindigkeit im Umkehrpunkt
Δp: Impulsänderung im Umkehrpunkt
m: Masse von Rad
ω: Winkelgeschwindigkeit im Umkehrpunkt
r: Abrollradius

$$\boxed{v = \omega \cdot r;\ \Delta p = 2 \cdot m \cdot v = 2 \cdot m \cdot \omega \cdot r}$$

Benötigte Zeit für einen halben Umlauf (Richtungsänderung):

$$\boxed{\frac{T}{2} = \frac{1}{2 \cdot f} = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \omega} = \frac{\pi}{\omega}}$$

Für die gemittelte Kraft (nach unten gerichtet, da sie der Beschleunigung auf des Rad entgegenwirkt) folgt:

$$\boxed{\langle F \rangle = \frac{\Delta p}{T/2} = \frac{2 \cdot m \cdot r \cdot \omega}{\pi/\omega} = \frac{2}{\pi} \cdot m \cdot r \cdot \omega^2}$$

Ansatz mit Zentrifugalkraft:

Annahme: Die Radachse bewegt sich im Umkehrpunkt auf einer Halbkreisbahn, auf der sie durch eine Kraft (Zentripetalkraft) gehalten werden. Somit wirkt die Gegenkraft (Zentrifugalkraft) über die Schnur auf das Gestänge. (Außerdem muss das Rad eine gewisse Symmetrie aufweisen, sonst es kompliziert)

Zentrifugalkraft: $F_Z = m \cdot r \cdot \omega^2$; mittlere Kraft auf das Gestänge:

$$\boxed{\left\langle \vec{F}_Z \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \mathrm{d}x \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \cdot F_Z = \frac{2}{\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot m \cdot r \cdot \omega^2}$$

Aus der Vektor Integration lässt sich noch entnehmen, dass auch diese Kraft nach unten gerichtet ist. Der Faktor $2/\pi$ ergibt sich aus der Mittelung über die Umkehrbewegung. Die Ergebnisse stimmen somit überein. Es ist nun lediglich noch zu überlegen ob die Gravitationskraft in die Überlegung mit einfließen sollte (Rechnung ähnlich).