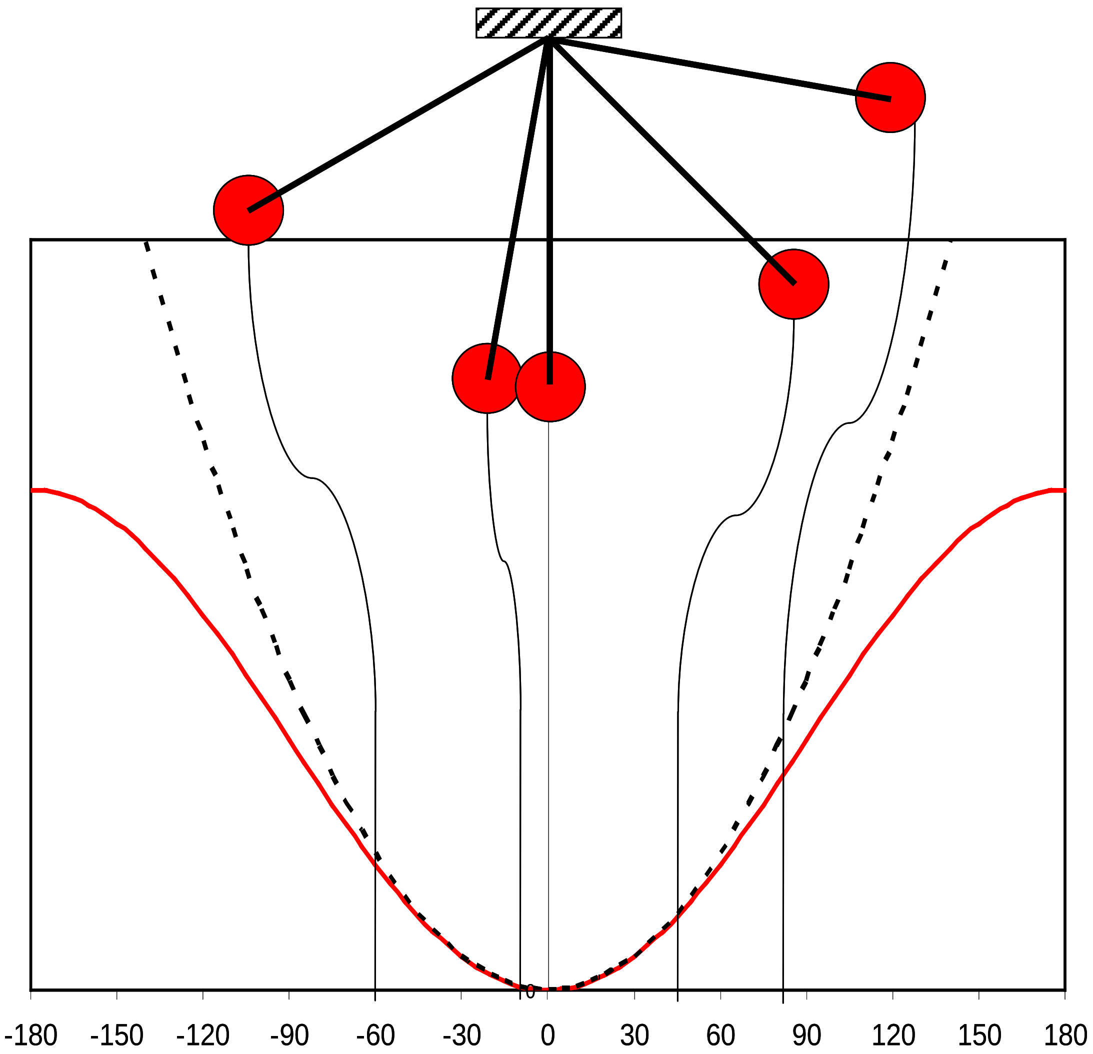


Pendel und Energiesatz

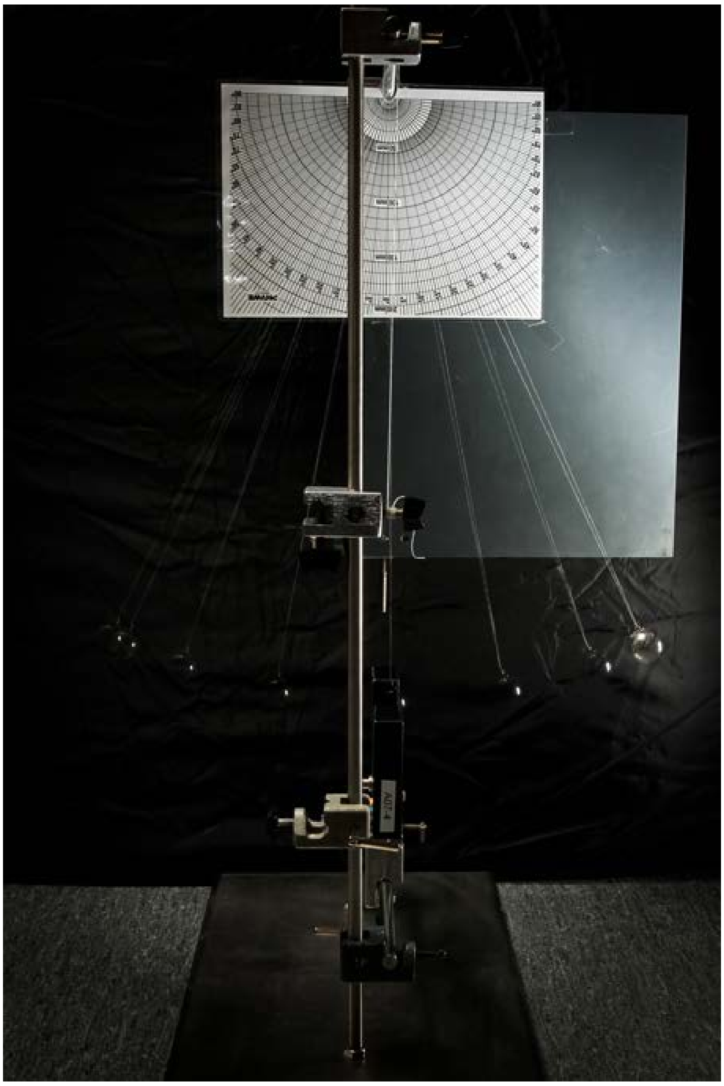
Ziele

In diesem Praktikumsversuch untersuchen Sie Pendelbewegungen, Sie schauen sich an, was passiert, wenn Sie auf die üblichen Näherungen „kleine Ausschläge“ und „ohne Reibung“ verzichten. Der Aufbau eines theoretischen Modells gelingt mithilfe des Energieerhaltungssatzes.

Fragen und Aufgaben

Klären Sie folgende Fragen *vor Durchführung* des Versuchs.

(1) Welche physikalischen Größen charakterisieren ganz allgemein periodische Schwingungen?
(2) Die potentielle Energie im Federpendel ist durch Gl. 1 gegeben. Leiten Sie diese Beziehung her und zeigen Sie durch Taylorentwicklung der cos-Funktion, dass für kleine Auslenkungen das Parabelpotential der harmonischen Schwingung vorliegt.
(3) Beschreiben Sie den zeitlichen Ablauf einer gedämpften Schwingungen mittels des Energieerhaltungssatzes.
(4) Welche Arten von Luftwiderstand werden üblicherweise unterschieden? Wovon hängt ab, wie die Strömungsgeschwindigkeit den Strömungswiderstand bestimmt?



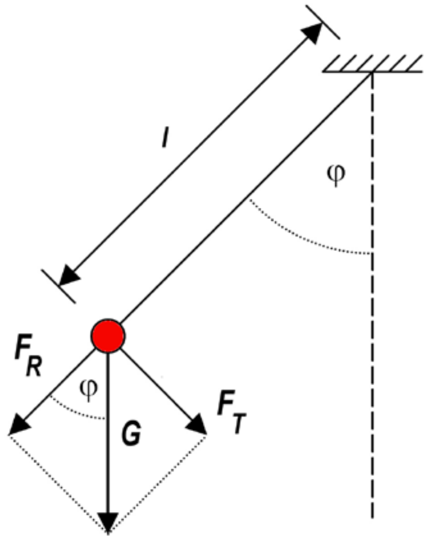
1 Energie beim Schwerependel

1.1 Energiesatz

Ein dünner (= masseloser) Faden zwinge ein Masse m auf eine Kreisbahn. Wirkt einzig die Gravitationskraft $G = m{\cdot}g$, hat das Masse-Faden-System bei Auslenkung um den Winkel φ die potentielle Energie (Energienullpunkt für $\varphi = 0$):

$$\begin{aligned} W_{\text{pot}} &= G\cdot \underbrace{h}_{l\cdot(1-\cos\varphi)} = mg\cdot l\cdot(1-\cos\varphi) \\ &\approx \frac{1}{2} mg\cdot l\cdot\varphi^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Näherung (Taylorentwicklung) $1 - \cos\varphi \approx \varphi^2/2$ für kleine Auslenkungen (vgl. Abb. 2) φ führt auf eine harmonische Schwingung.

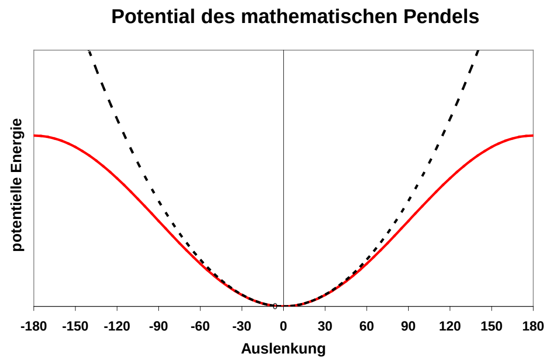


1 Kräfte beim Schwerependel

Der Faden überstreicht den Winkel φ mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$. Auf ihrer Kreisbahn hat m also die kinetische Energie

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\left(l\cdot\dot\varphi\right)^2 = \frac{1}{2} ml^2\Omega^2. \tag{2}$$

Wirkt Reibung, wird Reibungsarbeit ΔW_{R} abgeführt und das Pendel gebremst. Es gilt also der Energieerhaltungssatz



2 Pendelpotential und harmonische Näherung beim Fadenpendel

$$W_0 = W_{\text{kin}} + W_{\text{pot}} + \Delta W_{\text{R}} = \frac{1}{2} ml^2\Omega^2 + mg\cdot l\cdot\left(1-\cos\varphi\right) + \Delta W_{\text{R}}. \tag{3}$$

1.2 Keine Reibung, kleine Amplitude – der Klassiker

Ungebremst ($\Delta W_{\text{R}} = 0$) und für kleine Auslenkungen pendelt die Masse mit der Periodendauer T_0 (Abb. 3). Aus Gl. 3 folgt durch Ableitung nach der Zeit:

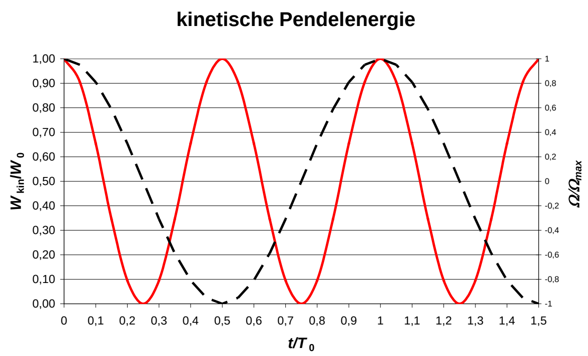
$$0 = \frac{g}{l}\Omega\cdot\varphi + \Omega\cdot\dot\Omega = \Omega\cdot\left(\frac{g}{l}\cdot\varphi + \ddot\varphi\right)$$

Eine Lösung, $\Omega = 0$, ist trivial und langweilig.

Die Dgl. für $\Omega \neq 0$ ist die bekannte Bewegungsgleichung für harmonische Schwingungen. Eine Lösung für $\Omega(t = 0) = \Omega_0$ und $\varphi(t = 0) = 0$ ist

$$\varphi(t) = \frac{T_0\Omega_0}{2\pi}\sin\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right);\; T_0 = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\Omega(t) = \dot\varphi(t) = \Omega_0\cos\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right).$$



3 Kinetische Energie und Winkelgeschwindigkeit des harmonisch schwingenden Fadenpendesl

1.3 Endliche Auslenkungen φ vergrößern die Periodendauer T

Gl. 3 bildet die Grundlage für die theoretische Beschreibung. Nach Ω aufgelöst, liefert Gl. 3

$$\Omega^2 = \frac{2}{ml^2}\left(W_0 - \Delta W_\mathrm{R}\right) - 2\frac{g}{l}\left(1-\cos\varphi\right) \tag{4}$$

Als Beispiel für die Anwendung von Gl. 4 finden Sie hier die Ableitung der Periodendauer ohne Reibung ($\Delta W_\mathrm{R} = 0$; $W_0 = gml\cdot(1\text{-}\cos\varphi_\mathrm{max}) = \mathrm{const}$). Den Winkel $\mathrm{d}\varphi$ überstreicht das Pendel (je nach Position) in der Zeit $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi/\Omega$. Daraus folgt für die Periodendauer ($W_0 = mgl\cdot(1-\cos\varphi_\mathrm{max})$; $0 \le \varphi \le 4\cdot\varphi_\mathrm{max}$):

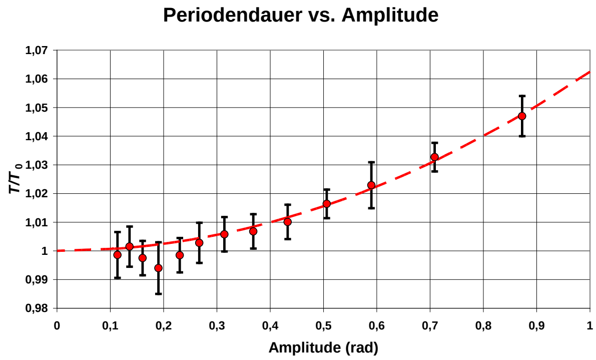
$$T = 4\cdot\int_0^{T/4}\mathrm{d}t = 4\cdot\int_0^{\varphi_\mathrm{max}}\frac{1}{\Omega}\mathrm{d}\varphi = 4\cdot\int_0^{\varphi_\mathrm{max}}\frac{1}{\dot\varphi}\mathrm{d}\varphi = 4\cdot\sqrt{\frac{l}{2g}}\cdot\int_0^{\varphi_\mathrm{max}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_\mathrm{max}}}. \tag{5}$$

Aufgabe: Rechnen Sie weiter; zeigen Sie, dass Gl. 5 die bekannte Beziehung für die Periodendauer des mathematischen Pendels im Grenzwert kleiner Auslenkungen ($\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2$) abwirft:

$$T_0 = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{6}$$

Aus Gl. 5 können Sie die erste Korrektur zur harmonischen Näherung T_0, der Periodendauer ableiten (vgl. Script „Pendel“).

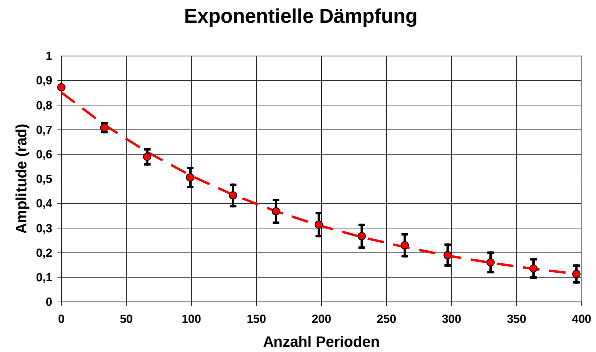
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left[1+\left(\frac{\varphi_\mathrm{max}}{4}\right)^2\right] = T_0\left[1+\left(\frac{\varphi_\mathrm{max}}{4}\right)^2\right] \tag{7}$$



4 Messung der nichtharmonische Korrektur der Periodendauer; gestrichelt die Vorhersage durch Gl. 7

1.4 Einfluss der Reibung

Durch Reibung verliert das Pendel mechanische Energie, die als Wärme an die Umgebung abgegeben wird. Im Fall $F_\mathrm{R} = -C\cdot v$; berechnet sich die mittlere Reibungsleistung zu $\langle P_\mathrm{R}\rangle = \langle F_\mathrm{R}\cdot v\rangle = -C\cdot\langle v^2\rangle$. Daraus berechnen Sie die Abnahme der Pendelenergie durch Reibung (Abb. 5). Die mittlere kinetische Energie ist $\langle W_\mathrm{kin}\rangle = m\langle v^2\rangle/2$. Im Pendel ist die mittlere kinetische Energie $\langle W_\mathrm{kin}\rangle$ halb so groß ist wie die Gesamtenergie (klar? Im Mittel sind kinetische und potentielle Energie gleich!). Damit schätzen Sie die Abnahme der Energie durch Reibung ab:



5 Dämpfung der Pendelschwingung ($Q = 618/\Lambda = 5{,}1\cdot10^{-3}$)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &\approx \langle P_\mathrm{R}\rangle = -C\cdot\langle v^2\rangle\\ \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= -\frac{2C}{m}\langle W_\mathrm{kin}\rangle = -\frac{C}{m}\cdot W = -2\delta\cdot W\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$
$$W(t) = W(0)\cdot\exp\left(-\frac{C}{m}t\right) = W(0)\cdot\exp(-2\delta t). \tag{8}$$

Aufgabe: Zeigen Sie, dass aus Gl. 8 für die Amplitude φ folgt: $\varphi(t) \sim \exp(-\delta\cdot t)$).

Schwingungsdämpfung wird, bezogen auf die Energie, durch den *Gütefaktor* Q charakterisiert und, bezogen auf die Amplitude, durch das *logarithmische Dekrement* Λ. Es sei ΔW_T die Energieabnahme pro Periode, dann ist der Gütefaktor definiert durch

$$Q = 2\pi \frac{W}{\left|\Delta W_T\right|}.$$

Zur Quantifizierung der Amplitudenabnahme berechnen Sie das Verhältnis direkt aufeinanderfolgender Amplituden und logarithmieren

$$\Lambda = -\ln\left(\frac{\varphi(nT)}{\varphi((n+1)T)}\right) = -\ln\left(\frac{\exp(-\delta nT)}{\exp(-\delta(n+1)T}\right) = \delta T.$$

Gütefaktor und logarithmisches Dekrement hängen natürlich zusammen

$$Q = 2\pi \frac{W}{\left|\Delta W_T\right|} \approx 2\pi \frac{W}{T\left|\mathrm{d}W/\mathrm{d}t_T\right|} \overset{\text{nach Gl. 8}}{\widehat{=}} 2\pi \frac{W}{W \cdot 2\delta T} = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\pi}{\Lambda}.$$

2 Kalibrierung des Pendels

(1) Bestimmen Sie Masse m und Durchmesser D des Pendelkörpers.
(2) Die genaue Bestimmung der Pendellänge l ist schwierig (Einfluss der Aufhängevorrichtung, Trägheitsmoment des Pendelkörpers usw.). Deshalb gehen Sie hier einen anderen Weg. Stellen Sie die Pendellänge so ein, dass der Pendelkörper genau mittig in der Lichtschranke hängt (z. B. Maximum der Dunkelzeit der Lichtschranke T_D für konstanten Anfangsausschlag; 50 cm ≤ L ≤ 60 cm). Messen Sie nun für Anfangsauslenkungen $5 < \varphi_0 < 60°$ (alle 5°) die Dunkelzeit T_D der Lichtschranke.

Auswertung

Aus T_D und dem Kugeldurchmesser D erhalten Sie die kinetische Energie W_{kin} am Nulldurchgang. Dabei gilt (g = 9,81 m/s²):

$$W_{kin} = W_{pot} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgl \cdot (1 - \cos\varphi_0) \Rightarrow T_D = \frac{D}{\sqrt{2gl(1-\cos\varphi_0)}}. \tag{9}$$

- Aus einem Fit von Gl. 9 an Ihre Messwerte bestimmen Sie l und eine Kalibrierungskurve $T_D = T_D(\varphi_0)$ für Ihr Pendel.
- Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit einer einfachen Längenmessung mithilfe des Meterstabes. Wie erklären Sie den Unterschied? Überprüfen Sie dazu den Einfluss der Größe der Massekugel.

3 Einfluss der Anfangsauslenkung auf die Periodendauer

Messen Sie nun für Anfangsauslenkungen $5 < \varphi_0 < 60°$ (alle 5°) die Periodendauer $T(\varphi_0)$. Das Zeitmessgerät an der Lichtschranke stellen Sie dazu auf die Registrierung *ansteigender* Flanken. Messen Sie nun die Zeit T_{mess} zwischen zwei solchen Ereignissen. Daraus ergibt sich die Periodendauer zu $T = 2 \cdot T_{mess}$ (Überlegen Sie sich bitte, warum das so ist.). Zur Reduktion der Messunsicherheit beim Einstellen der Anfangsauslenkung führen Sie jede Messung mindestens dreimal durch und bestimmen daraus Mittelwert und Streuung ($\langle T_{mess}\rangle$ und ΔT_{mess}).

Auswertung

Ihr Ergebnis ist ein Zusammenhang zwischen Periodendauer und Anfangsauslenkung φ_0: $T = T(\varphi_0)$. Bestimmen Sie aus einem Fit der theoretischen Korrektur (vgl. Abb. 4)

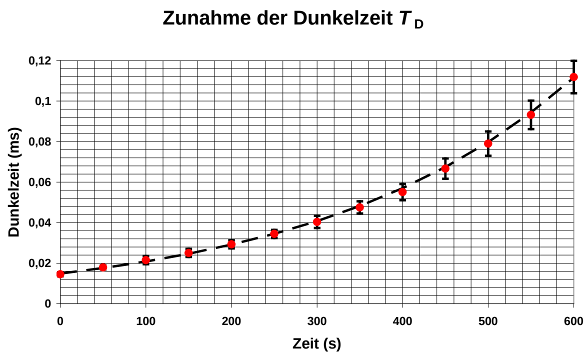
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\varphi_0^2}{A}\right) \quad (2)$$

den Korrekturfaktor 1/A. Verwenden Sie dazu Ihren Wert von T_0 aus der Kalibrierungsmessung.

- Wie groß ist die Abweichung Ihres Ergebnisses vom theoretisch zu erwartenden Wert $A = 16$ (vgl. Abb. 2)? Sind Vorhersage und Messung konsistent?
- Wie würden Sie aus dieser Messreihe einen Wert für T_0 bestimmen? Probieren Sie es aus. Passt dieser Wert zu dem Ergebnis aus der Kalibrierung?

4 Einfluss der Reibung

In einer ersten Messung bestimmen Sie zur Orientierung einen ungefähren Wert für die Halbwertszeit $T_{1/2}$(A) der Amplitude. Wie viel Prozent des Anfangsausschlages können Sie nach 2 $T_{1/2}$(A) erwarten? Für genauere Messungen der Dämpfung eignet sich wieder eine Messung der Dunkelzeit T_D beim Nulldurchgang. Beginnend mit einem Anfangsausschlag von 60° messen Sie nun T_D in Zeitabständen von Δt, die so groß sind, dass Sie etwa 10 Messpunkte in der Zeit $2\cdot T_{1/2}$(A) bekommen. Die Abnahme der Periodendauer mit der Abnahme der Pendelenergie wird hier vorerst ignoriert, später berechnen Sie den Fehler, der daraus resultiert.



6 Die Dunkelzeit T_D nimmt durch Dämpfung zu ($Q = 618/\Lambda = 5{,}1\cdot10^{-3}$; Fehlerbalken zeigen die Wirkung einer Messunsicherheit von 7%)

Aus der *Zu*nahme von T_D gewinnen Sie nun Informationen über die *Ab*nahme der Pendelenergie:

$$W_{kin} = \frac{1}{2}m\left(\frac{D}{T_D}\right)^2 \Rightarrow T_D = \sqrt{\frac{mD^2}{2W_{kin}}} \Rightarrow T_D = T_D\left(t=0\right)\cdot\exp\left(\delta t\right). \quad (10)$$

Aufgabe: Abb. 6 zeigt eine Messung für ein Pendel mit $\Lambda = \delta T_0 = 5{,}1\cdot10^{-3}$. Zeigen Sie, dass dies einer exponentiellen Abnahme der Pendelenergie mit einer Halbwertszeit von $T_{1/2}(E) = T_0\cdot\ln(2)/(2\cdot\Lambda) = 68\ T_0$. entspricht. Wie unterscheiden sich die Halbwertszeiten der Amplitude und der Energie $T_{1/2}$(A) und $T_{1/2}$(E)?

Auswertung

Bestimmen Sie aus einem Fit von Gl. 10 an Ihre Messwerte Gütefaktor, logarithmisches Dekrement und Halbwertszeit $T_{1/2}$(A) Ihres Pendels. Beantworten Sie damit folgende Frage:

- Wie viel Prozent Energie wird dem Pendel pro Periode entzogen.
- Bestimmen Sie die Bremskraft beim Nulldurchgang des Pendels. (Nur wenn Sie die Wirbelstrom-bremse ausprobieren)
- Zur Bestimmung des logarithmischen Dekrements setzen die Periodendauer T_0 ein. Messung 3 hat Ihnen jedoch gezeigt, dass die Periodendauer eine Funktion der Amplitude ist. Wie groß ist der relative Fehler $\Delta\Lambda/\Lambda$, den Sie dabei maximal machen?