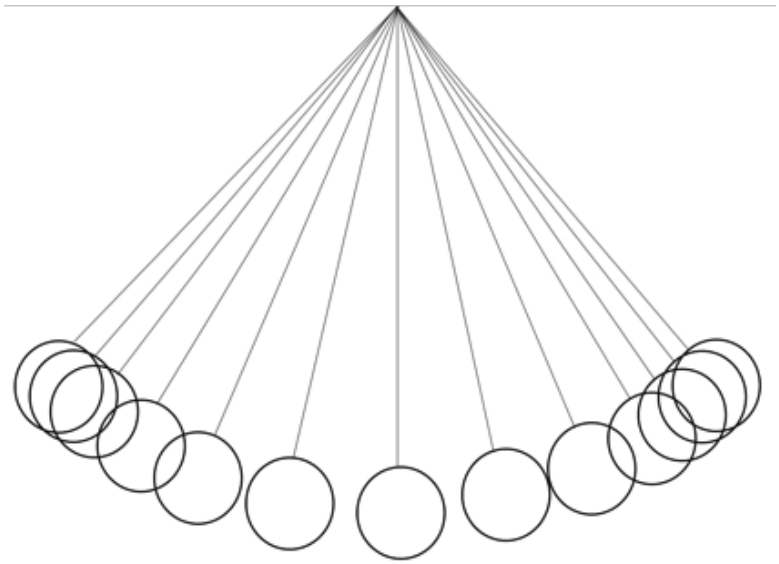
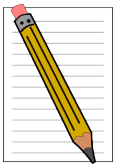


Fadenpendel

Oszillationsbewegungen faszinieren durch ihre Harmonizität; sie stellen gleichzeitig ein empfindliches und im besonderen Fall atomarer Oszillatoren auch höchstgenaues metrologisches Werkzeug dar. Schon das einfache Fadenpendel gestattet einen überraschend einfachen Einblick in die wirkenden Kraftfelder.

Schriftliche VORbereitung:

- Was ist die *Erdbeschleunigung*?
- Die Newtonschen Axiome, vor allem $F = m \cdot a$, was bedeuten sie?
- Welche Bedeutung haben *Trägheitsmoment*, *Drehmoment*, *Winkelgeschwindigkeit* und *Dämpfung*?
- Welche physikalischen Größen beschreiben die Pendelbewegung?
- Was ist der Unterschied zwischen dem mathematischen und dem physikalischen Pendel?
- Welches Naturgesetz verlangt, dass die Pendelebene beim Foucaultschen Pendel gleich bleibt?
- Was ist die *Corioliskraft*?
- Leiten Sie die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels her und bestimmen Sie die Lösung der linearisierten Differentialgleichung.
- Rechnen Sie nach, dass die Näherung (III) $\sin(x) \approx x$ für 30° besser als 5 % ist.
- Begründen Sie mit (II) und dem *Steinerschen Satz*, dass sich das Trägheitsmoment J der pendelnden Kugel nach $J = J_k + ml^2$ berechnet. Dabei ist J_k das Trägheitsmoment bei Drehung um den Kugelmittelpunkt.
- Berechnen Sie J_k für den kugelförmigen Pendelkörper (Radius r). *Ergebnis:* $J_k = \frac{2}{5}mr^2$



©Dr. Rüdiger Scholz, Dr. Kim-Alessandro Weber
u. Dr. Roland Fleddermann - Leibniz Universität Hannover, Juni 2024

PhysikPraktikum

1 Grundlagen

Eine Masse m hängt an einem Faden. Wird sie um den Winkel φ_0 ausgelenkt und losgelassen, pendelt sie hin und her. Sie untersuchen in diesem Versuch Eigenschaften dieser Oszillationen. Um die mathematische Beschreibung dramatisch zu vereinfachen, setzen Sie auf eine Reihe Näherungen, die unterschiedlich weit neben der Wahrheit liegen:

(I) Die Dämpfung ist gering.

(II) Der Faden ist massefrei.

(III) Die Auslenkung $\varphi(t)$ bleibt kleiner als 30° (siehe Aufgabe).

(IV) Die räumliche Ausdehnung des Pendelkörpers ist vernachlässigbar klein. (Siehe Aufgabe)

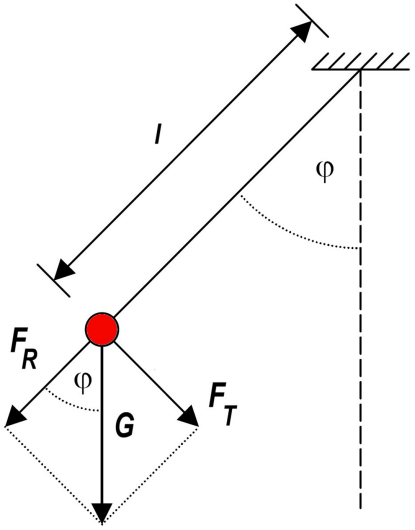


Abbildung 1: Kräfte beim Schwerependel

Die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels

Die Zerlegung der Schwerkraft auf den Pendelkörper in die zwei Komponenten senkrecht und parallel zum Faden führt auf eine radiale Kraft (F_R), die den Faden spannt und eine tangentielle Kraft $F_T = m \cdot g \cdot \sin(\varphi)$, die ein Rückstellmoment bewirkt. Aus den *Newtonschen Axiomen* folgt damit die Momentengleichung

$$J \cdot \ddot{\varphi} + mgl \cdot \sin(\varphi) - M_{\text{Reibung}} = 0. \tag{1}$$

Mit Näherung (I) $M_{\text{Reibung}} \approx 0$ und Näherung (III) $\sin(x) \approx x$ vereinfacht sich Gl. (1) zu:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J}\varphi = 0. \tag{2}$$

Eine Lösung der DGL (2) mit den Anfangswerten $\varphi(t = 0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ ist

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t), \text{ mit } \omega = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{mgl}{J}}. \tag{3}$$

Für eine Punktmasse (Näherung (IV)) mit dem Trägheitsmoment $J = ml^2$ um den Aufhängepunkt kann man dies noch weiter vereinfachen und erhält

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ oder } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Für real existierende, kugelförmige Massen muss man zusätlich noch das Trägheitsmoment der Kugel bei Drehung um ihren Mittelpunkt berücksichtigen. Das gesamte Trägheitsmoment ergibt sich nach dem *Steinerschen Satz* und für einen (annähernd) massefreien Faden dann zu $J = J_k + ml^2 = m(2/5r^2 + l^2)$. Ausgehend von Gleichung 3 erhält man diesem Fall also

$$\omega = \sqrt{\frac{gl}{2/5r^2 + l^2}},$$

was sich durch einführen der *effektiven Länge* $l_{\text{eff}} = \frac{l^2+2/5r^2}{l}$ einfacher als

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l_{\text{eff}}}} \text{ bzw. } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{eff}}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g} + \frac{2r^2}{5gl}} \tag{4}$$

schreiben lässt.

2 Experimente

Sie messen an einem Fadenpendel, das so aufgehängt ist, dass Sie die Länge des Fadens leicht verändern können. Weiterhin ist das Pendel bifilar aufgehängt und der Auslenkungswinkel kann mittels einer hinter dem Pendel angebrachten Skala abgelesen werden.

Weiterhin messen Sie im Laufe des Nachmittags mehrmals die Drehung der Pendelebene des Foucault Pendels. Vergessen Sie nicht, diese Regelmäßig abzulesen (siehe Messaufgabe (M8)).

Ihre persönliche „Schrecksekunde“

(M1) Messen Sie Ihre „Schrecksekunde“: Versuchen Sie mit der Stoppuhr genau 5 s zu stoppen (fünfmal).

(A1) Der Mittelwert der Abweichungen aus fünf Messungen ist Ihre persönliche Messunsicherheit u(t) für die Zeitmessung.

Messung des Ortsfaktors

(M2) Bestimmen Sie für fünf verschiedene Längen $l_1, \ldots, l_5$ die Periodendauer T. Messen Sie dazu jeweils die Zeiten für 5, 10 und 20 Perioden (T_5, T_{10} und T_{20}).

(A2) Ihre persönliche Messunsicherheit u(t) wirkt sich unterschiedlich aus. Berechnen Sie für die drei Fälle T_5, T_{10} und T_{20} jeweils die Messunsicherheit u(T).

(A3) Tragen Sie $y = T^2$ gegen $x = l$ auf. Den Ortsfaktor g können Sie nach Gl. 4 aus der Steigung A der Ausgleichsgeraden bestimmen.

Die effektive Pendellänge

Die wirksame Pendellänge ist um $\Delta l = l_{\text{eff}} - l$ größer als die rein geometrische.

(M3) Messen Sie den Kugelradius r und berechnen Sie vor Ort die Abweichung Δl.

Genügt Ihre Messgenauigkeit, um den Unterschied zwischen l_{eff} und l experimentell nachzuweisen?

(A4) Vergleichen Sie die *relative* Messunsicherheit der Längenmessung mit der relativen Längenänderung $\frac{\Delta l}{l}$.

(A5) Begründen Sie: Die Schwingungsdauer eines Fadenpendels ist umso größer, je länger das Pendel ist. Sie ist aber unabhängig von der Masse und für kleine Ausschläge auch unabhängig von der Anfangsamplitude.

Einfluss des Pendelausschlags

©Dr. Rüdiger Scholz, Dr. Kim-Alessandro Weber
u. Dr. Roland Fleddermann - Leibniz Universität Hannover, Juni 2024

PhysikPraktikum

In der hier abgeleiteten Näherungslösung hängt die Periodendauer nicht vom Anfangsausschlag ab. Abb. 2 zeigt das Ergebnis einer genaueren Rechnung. Danach nimmt die Periodendauer mit dem Ausschlag zu. Der genaue Zusammenhang ist in [1] beschrieben, als Ergebnis erhält man ein elliptisches Integral. Dies lässt sich aber zumindest für Anfangsauslenkungen bis ca. 60 Grad sehr gut durch eine Taylorentwicklung annähern.

Da das Pendel bifilar aufgehängt ist, können Sie den Ausschlag parallaxefrei ablesen.

Um die theoretische Vorhersage zu prüfen, gehen Sie folgendermaßen vor:

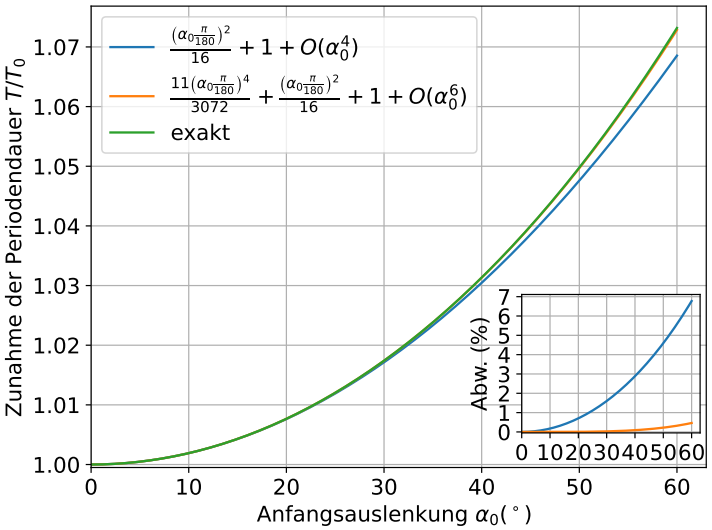


Abbildung 2: Abweichung von T vom harmonischen Wert T_0. Die Periodendauer nimmt leicht mit der Auslenkung zu. Vgl. Abb 2.67 in [1]

(M4) Wiederholen Sie für eine Fadenlänge $l >$ 50 cm die beiden unten stehenden Messungen jeweils einmal für fünf Messpunkte mit $0 < \varphi_0 < 45°(= \frac{\pi}{4})$.

1. Messen Sie die Zeit T_{20} für 20 Perioden und bestimmen Sie daraus jeweils die Periodendauer T.
2. Messen Sie den Ausschlag φ_{20} nach 20 Perioden.

(A6) Tragen Sie in einem Diagramm T/T_0 gegen $\langle\varphi\rangle_0 = \frac{\varphi_0+\varphi_{20}}{2}$ auf und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Abb. 2.

(A7) Berechnen Sie die *Messunsicherheit der Periodendauer* $(\mathrm{u}(T = \frac{T_{20}}{20}))$ mit $\mathrm{u}(t)$ aus (A1).

Messunsicherheit

(A8) Machen Sie eine plausible Annahme über die Messungenauigkeiten $\mathrm{u}(l)$. Bestimmen Sie unter Anwendung des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes aus $\mathrm{u}(T)$ und $\mathrm{u}(l)$ die Messunsicherheit $\mathrm{u}(g)$ („Fehlerbalken“ für die graphische Darstellung). Begründen Sie: Die untere Genauigkeitsgrenze der g-Messung wird von $\mathrm{u}(l)/l$ bestimmt, nicht von $\mathrm{u}(T)/T$.

(A9) Ein Typ-B-Fehler tritt auf, weil die Pendellänge durch die Längenmessung allein zu klein herauskommt. Begründen Sie dies, korrigieren Sie den Fehler und überprüfen Sie damit Ihr Ergebnis für g.

Der (Nicht-)Einfluss der Masse des Pendelkörpers

(M5) Untersuchen Sie mit dem Fadenpendel an der Wand den Einfluss der Masse m des Pendelkörpers. Verwenden Sie dazu die bereitliegenden Pendelkörper unterschiedlicher Materialien. Bestimmen Sie die Periodendauern aus T_{10} (Zeit für zehn volle Schwingungen). Achten Sie darauf, dass das Pendel möglichst eben schwingt und nicht die Wand berührt.

©Dr. Rüdiger Scholz, Dr. Kim-Alessandro Weber u. Dr. Roland Fleddermann - Leibniz Universität Hannover, Juni 2024

Das Foucault-Pendel - Erdrotation

Ein Fadenpendel, einmal angestoßen, schwingt immer in derselben Ebene. Auch wenn sich der Tisch mit der Pendelaufhängung dreht, behält es seine Schwingungsebene bei (Abb. 3). Es wirken ja keine Kräfte quer zur Schwingungsebene.

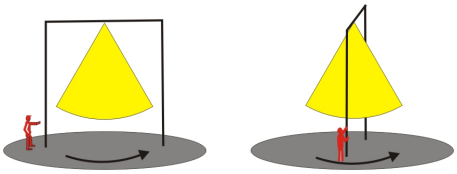


Abbildung 3: Der Tisch dreht sich unter dem Pendel, das Pendel schwingt trotzdem in der anfänglichen Ebene weiter

Corioliskraft

Im Praktikum steht ein Drehtisch mit einem Pendel, das seine Bewegung in Sand schreibt. Können Sie beobachten, dass die Schwingungsebene konstant bleibt? Was würde ein auf dem Tisch mitbewegter Beobachter sehen?

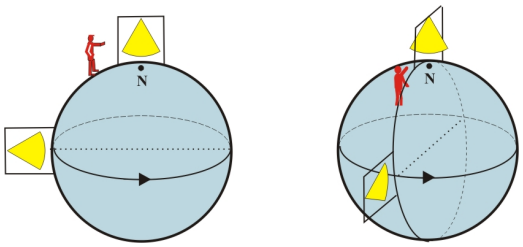


Abbildung 4: Am Äquator lässt sich die scheinbare Drehung der Pendelebene nicht beobachten. Die Erde dreht sich dort nicht unter dem Pendel, die Pendelebene wird von der rotierenden Erde mitgenommen.

(M6) Fotografieren Sie die Spuren im Sand.

(M7) Messen Sie mit der Stoppuhr die Zeit t_{20} für 20 Schwingungen.

(A10) Erklären Sie die Spuren im Sand.

(A11) Bestimmen Sie aus dem Abstand der Spuren im Sand und der Schwingungsdauer des Pendels die Rotationsrate des Tisches.

Für einen Beobachter auf dem Tisch ist der Tisch in Ruhe, die Pendelebene jedoch dreht sich. Um dies zu verstehen, würde der Beobachter im rotierenden System eine zusätzliche Kraft, die *Corioliskraft*, berechnen. Mit ihr lassen sich auch die Ablenkungen der großen Windsysteme auf der rotierenden Erde erklären (z. B. die Richtung der Passatwinde). Die Corioliskraft bewirkt auf der Nordhalbkugel für alle Bewegungen, die nicht parallel zur Erddrehung sind, eine Rechtsablenkung.

Unter einem Pendel, das genau über dem Nordpol schwingt, dreht sich die Erde einmal am Tag um 360° hinweg. Ein Beobachter dort auf der Erde sieht umgekehrt, dass sich die Pendelebene dreht. Was beobachten wir hier in Hannover? Unter einem Pendel, das hier aufgehängt ist (Abb. 5), dreht sich der Erdboden (Horizont) entsprechend der nördlichen Breite von $\varphi \approx 52°$ nur mit

$$\omega_{\text{Hannover}} = \omega_{\text{Erde}} \cdot \sin\varphi \approx \omega_{\text{Erde}} \cdot 0{,}79$$

In einer Stunde dreht sich der Erdboden in Hannover somit um $2\pi/24 \cdot 0.79 = 0.21 = 11.8°$. Die Demonstration dieses Effekts gelingt mit dem *Foucaultschen Pendel*. FOUCAULT hat 1850 in Paris ein Pendel mit einer 28 kg schweren Kugel und einem 67 m langen Draht aufgebaut. Im Praktikum steht eine wesentlich kleinere Version.

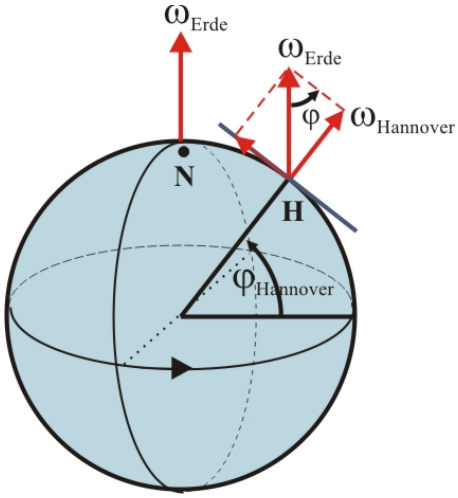


Abbildung 5: Foucault-Pendel im Physik-Praktikum

(M8) Messen Sie bitte im Lauf des Nachmittags dreimal die Drehung der Pendelebene am Foucault-Pendel.

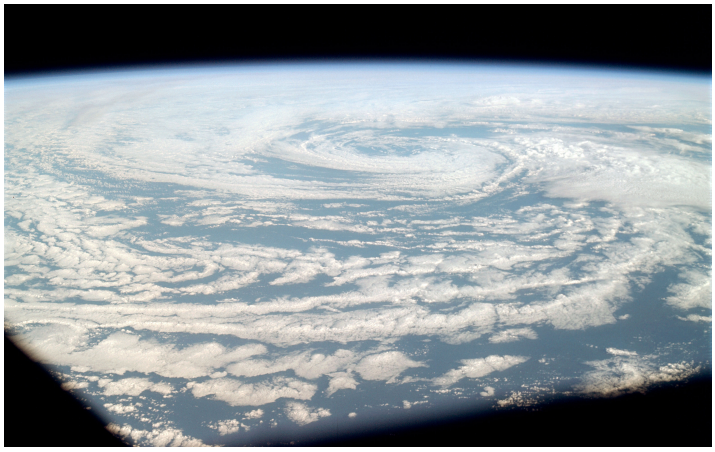


Abbildung 6: Ein Tiefdruckgebiet nördlich von Hawaii aus 200 km Höhe. Vgl. [1] Abb. 3.14c. Aufgenommen vom Apollo 9 Kommando-Modul im Erdorbit aus. Bearbeitung von [2]

(A12) Tragen Sie die Winkel über die Zeit auf und bestimmen Sie aus der Steigung der Ausgleichsgeraden die Geschwindigkeit der Drehung der Pendelebene.

(A13) Stimmen Ihre Werte mit der Theorie überein?

Literatur

[1] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2021.

[2] Apollo 9 Crew. AS09-23-352 - Apollo 9 - Apollo 9 Mission image - Earth Observation. NAID: 16674437. National Archives Catalog Record Group 255: Records of the National Aeronautics and Space Administration.