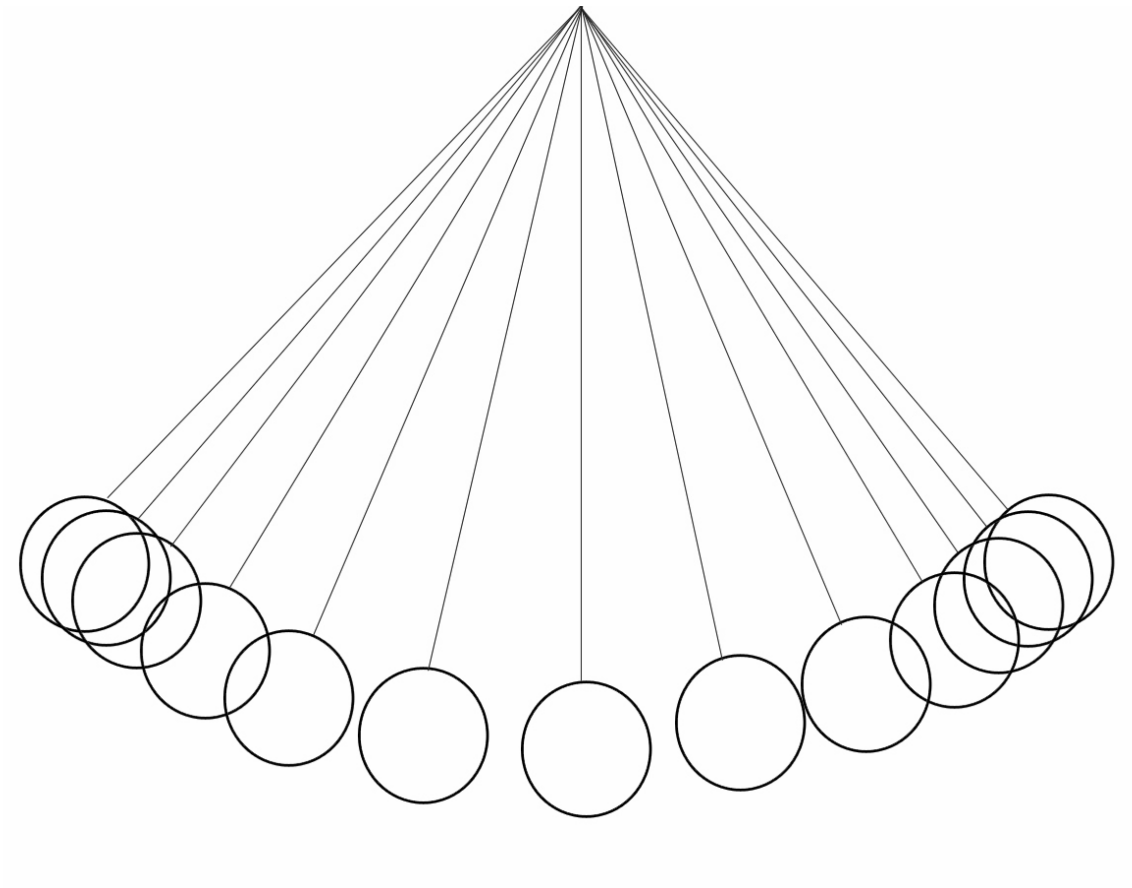


# A05 Das einfache Fadenpendel

## Ziele

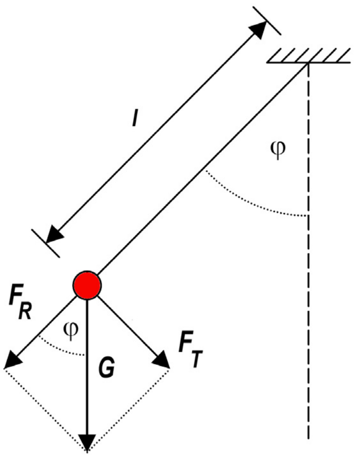
Oszillationsbewegungen faszinieren durch ihre Harmonizität; sie stellen gleichzeitig ein empfindliches und im besonderen Fall atomarer Oszillatoren auch höchstgenaues metrologisches Werkzeug dar. Schon das einfache Fadenpendel gestattet einen überraschend einfachen Einblick in die wirkenden Kraftfelder.

## Das sollten Sie wissen

- Was ist die *Erdbeschleunigung* bzw. der *Ortsfaktor g?*
- Die Newtonschen Axiome, vor allem $F = m \cdot a$, was bedeuten sie?
- Welches Naturgesetz verlangt, dass die Pendelebene beim Foucaultschen Pendel gleich bleibt?
- Welche Bedeutung haben Trägheitsmoment, Drehmoment, Winkelgeschwindigkeit und Dämpfung?
- Welche physikalischen Größen beschreiben die Pendelbewegung.
- Was ist der Unterschied zwischen dem mathematischen und dem physikalischen Pendel?
- Was ist die *Corioliskraft*?
- Für Studierende der A-Kurse: Leiten Sie die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels ab und bestimmen Sie die Lösung der linearisierten Differentialgleichung.

# 1 Grundlagen

Eine Masse *m* hängt an einem Faden. Wird sie um den Winkel $\varphi_0$ ausgelenkt und losgelassen, pendelt sie hin und her. Sie untersuchen in diesem Versuch Eigenschaften dieser Oszillationen. Um die mathematische Beschreibung dramatisch zu vereinfachen, setzen Sie auf eine Reihe Näherungen, die unterschiedlich weit neben der Wahrheit liegen:



1 Kräfte beim Schwerependel

(I) Die Dämpfung ist gering. Die Anzahl der Schwingungen, nach der das Pendel die Hälfte der Energie verloren hat ist größer als 100.
(II) Die Auslenkung $\varphi(t)$ bleibt kleiner als 30°.
(III) Die räumliche Ausdehnung des Pendelkörpers ist vernachlässigbar klein.
(IV) Der Faden ist massefrei.

### Die Bewegungsgleichung des *mathematischen Pendels*

Die Zerlegung der Schwerkraft auf den Pendelkörper in die zwei Komponenten senkrecht und parallel zum Faden führt auf eine Kraft, die den Faden spannt ($F_R$) und eine, die ein Rückstellmoment bewirkt ($F_T = m \cdot g \cdot \sin(\varphi)$). Aus den *Newtonschen Axiomen* folgt damit die Momentengleichung

$$J \cdot \ddot{\varphi} + mgl \sin(\varphi) - M_{\text{Reibung}} = 0 . \tag{1}$$

Näherungen: $M_{\text{Reibung}} \approx 0$ (nach (I); $\sin(\varphi) \approx \varphi$ (nach (II)). Gl. (1) vereinfacht sich damit zu

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J}\varphi = 0 . \tag{2}$$

**Aufgaben** (vorher zuhause zu bearbeiten): (1) Rechnen Sie nach, dass für $\varphi < 30°$ gilt „$\sin(\varphi) \approx \varphi$ ist mit einer Genauigkeit besser als 5 % bestimmt". (2) Begründen Sie mit (IV) und dem *Steinerschen Satz*, dass sich das Trägheitsmoment der pendelnden Kugel nach $J = m \cdot l^2 + J_K$ berechnet. $J_K$ ist dabei das Trägheitsmoment bei Drehung um den Kugelmittelpunkt. (3) Für die A-Kurse: $J_K$ lässt sich für den kugelförmigen Pendelkörper (Radius *r*) leicht berechnen: $J_K = 2 \cdot m \cdot r^2/5$.

Eine Lösung der Dgl. Gl. 2 mit den Anfangswerten $\varphi(t = 0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ ist

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t);\ \omega = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{gl}{l^2 + 2r^2/5}} . \tag{3}$$

Führt man die *effektive Länge* $l_{\text{eff}} = (l^2 + 2 \cdot r^2/5)/l$ ein wird der Ausdruck für die Periodendauer handlicher:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{eff}}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g} + \frac{2r^2}{5l \cdot g}} \tag{4}$$

**Aufgaben:** (1) Die wirksame Pendellänge ist um $\Delta l$ größer als die rein geometrische. Messen Sie *r* und berechnen Sie die Abweichung $\Delta l = l_{\text{eff}} - l$. (2) Begründen Sie: Die Schwingungsdauer eines Fadenpendels ist umso größer, je länger das Pendel ist. Sie ist aber unabhängig von der Masse und für kleine Ausschläge auch unabhängig von der Anfangsamplitude.

# 2 Experimente

Nicht alle Details des Aufbaus und der Messungen sind hier detailliert vorbestimmt. Ihre Kreativität ist gefragt. Sollten Sie Probleme beim Experimentieren haben, schauen Sie, was die anderen Gruppen machen oder fragen Sie die Tutoren.

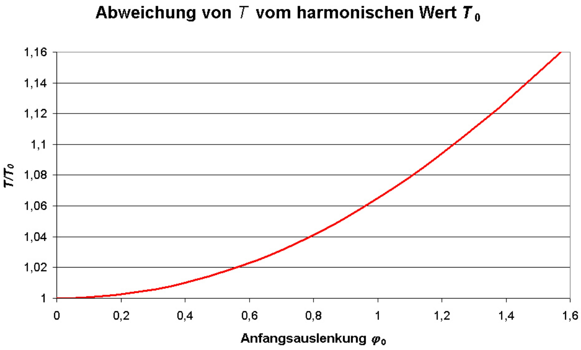
### Ihre persönliche „Schrecksekunde“

Messen Sie Ihre „Schrecksekunde“: Versuchen Sie Stoppuhr genau nach 5 s zu stoppen. Der Mittelwert der Abweichungen aus fünf Versuchen ist Ihre persönliche Messunsicherheit $u(t)$ für die Zeitmessung.

### Einfluss des Pendelausschlags

In der hier abgeleiteten Näherungslösung Gl. 4 hängt die Periodendauer nicht vom Anfangsausschlag ab. Abb. 2 zeigt das Ergebnis einer genaueren Rechnung. Danach nimmt die Periodendauer mit dem Ausschlag zu. Da das Pendel bifilar aufgehängt ist, können Sie den Ausschlag parallaxefrei ablesen.

Um die theoretische Vorhersage zu prüfen, gehen Sie folgendermaßen vor:




2 Die Periodendauer nimmt leicht mit der Auslenkung zu.

1. Wählen Sie für eine Länge $l > 50$ cm fünf Messpunkte mit $0 < \varphi_0 < 45°( = \pi/4)$.
2. Messen Sie die Zeit $T_{20}$ für 20 Perioden und bestimmen Sie daraus jeweils die Periodendauer $T$.
3. Messen Sie den Ausschlag $\varphi_{20}$ nach 20 Perioden.
4. Tragen Sie in einem Diagramm $T/T_0$ gegen $\langle\varphi\rangle_0 = (\varphi_0+\varphi_{20})/2$ auf und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Abb. 2.

Berechnen Sie die Messunsicherheit der Periodendauer $T = T_{20}/20$ aus $u(t)$.

### Messung des Ortsfaktors

Bestimmen Sie für fünf verschiedene Längen $l_1$, ..., $l_5$ die Periodendauer $T$. Messen Sie dazu jeweils die Zeiten für 5, 10 und 20 Perioden ($T_5$, $T_{10}$ und $T_{20}$) und berechnen Sie daraus (auf fünf signifikante Ziffern genau) die Periodendauer $T$.

Ihre persönliche Messunsicherheit $u(t)$ wirkt sich unterschiedlich aus. Berechnen Sie für die drei Fälle $T_5$, $T_{10}$ und $T_{20}$ jeweils die Messunsicherheit $u(T)$.

Tragen Sie $y = T^2$ gegen $x = l$ auf. Den Ortsfaktor $g$ können Sie dann nach Gl. 4 aus der Steigung $A$ der Ausgleichsgeraden bestimmen.

### Messunsicherheit

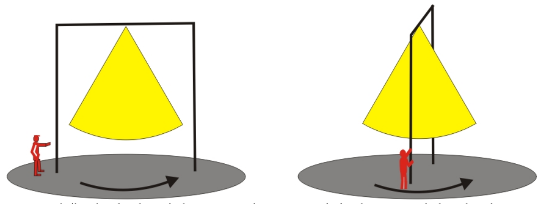
Machen Sie eine plausible Annahme über die Messungenauigkeiten $u(l)$. Bestimmen Sie unter Anwendung des Gausschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes aus $u(T)$ und $u(l)$ die Messunsicherheit $u(g)$ („Fehlerbalken“ für die grafische Darstellung). Begründen Sie: Die untere Genauigkeitsgrenze der $g$-Messung wird von $u(l)/l$ bestimmt, nicht von $u(T)/T$.

**Auswertungsaufgabe** (für A-Kurs-Studierende)
Ein Typ-B-Fehler tritt auf, weil die Pendellänge durch die Längenmessung allein zu klein herauskommt. Begründen Sie dies, korrigieren Sie den Fehler und überprüfen Sie damit Ihr Ergebnis für $g$.

## Der (Nicht-)Einfluss der Masse des Pendelkörpers

Untersuchen Sie mit dem Fadenpendel an der Wand den Einfluss der Masse $m$ des Pendelkörpers. Verwenden Sie dazu die bereitliegenden Pendelkörper unterschiedlicher Materialien.

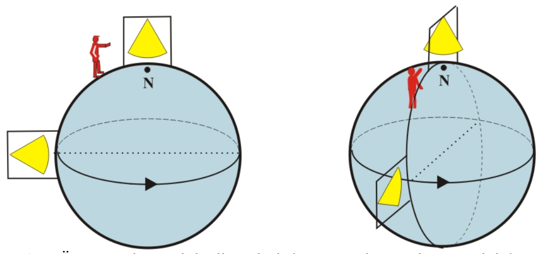
Bestimmen Sie die Periodendauern aus $T_{10}$ (Zeit für 10 volle Schwingungen). Achten Sie darauf, dass das Pendel möglichst eben schwingt und nicht die Wand berührt.



3a Der Tisch dreht sich unter dem Pendel, das Pendel schwingt trotzdem in der anfänglichen Ebene weiter.

## Das Foucaultsche Pendel – Erdrotation

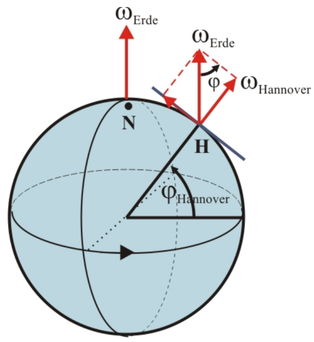
Ein Fadenpendel, einmal angestoßen, schwingt immer in derselben Ebene. Auch wenn sich der Tisch mit der Pendelaufhängung dreht, behält es seine Schwingungsebene bei (Abb. 3). Es wirken ja keine Kräfte quer zur Schwingungsebene.




3b Am Äquator lässt sich die scheinbare Drehung der Pendelebene nicht beobachten. Die Erde dreht sich dort nicht unter dem Pendel, die Pendelebene wird von der rotierenden Erde mitgenommen.

**Corioliskraft** Im Praktikum steht ein Drehtisch mit einem Pendel, das seine Bewegung in Sand schreibt. Können Sie beobachten, dass die Schwingungsebene konstant bleibt? Was würde ein auf dem Tisch mitbewegter Beobachter sehen?

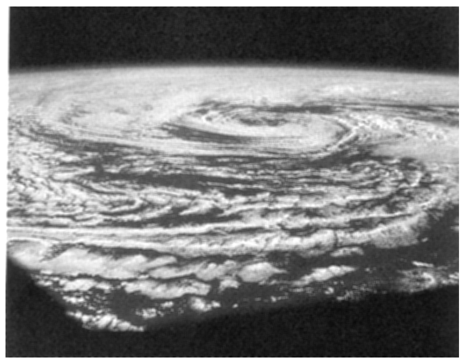
Für einen Beobachter auf dem Tisch ist der Tisch in Ruhe, jedoch die Pendelebene dreht sich. Um dies zu verstehen, würde der Beobachter im rotierenden System eine zusätzliche Kraft, die *Corioliskraft*, berechnen. Mit ihr lassen sich auch die Ablenkungen der großen Windsysteme auf der rotiertenden Erde erklären (z. B. die Richtung der Passatwinde). Die Corioliskraft bewirkt auf der Nordhalbkugel für alle Bewegungen, die nicht parallel zur Erddrehung sind, eine Rechtsablenkung. Erklären Sie damit die Spuren im Sand.




3c Foucault-Pendel im PhysikPraktikum

Unter einem Pendel, das genau über dem Nordpol schwingt, dreht sich die Erde einmal am Tag um 360° hinweg. Ein Beobachter dort auf der Erde sieht umgekehrt, dass sich die Pendelebene dreht. Was beobachten wir hier in Hannover? Unter einem Pendel, das hier aufgehängt ist (Abb. 3c), dreht sich der Erdboden (Horizont) entsprechend der nördlichen Breite von $\varphi \approx 52°$ nur mit

$$\omega_{\text{Hannover}} = \omega_{\text{Erde}} \cdot \sin\varphi \approx \omega_{\text{Erde}} \cdot 0{,}79 .$$



3d Ein Tiefdruckgebiet über der Nordhalbkugel aus 128 km Höhe

In einer Stunde dreht sich die Erde in Hannover also um $2\pi/24 \cdot 0{,}79 = 0{,}21 = 11{,}8°$. Die Demonstration dieses Effekts gelingt mit dem *Foucaultschen Pendel.* FOUCAULT hat 1850 in Paris ein Pendel mit einer 28 kg schweren Kugel und einem 67 m langen Draht aufgebaut. Im Praktikum steht eine wesentlich kleinere Version. Messen Sie bitte im Lauf des Nachmittags dreimal die Drehung der Pendelebene. Stimmen Ihre Werte mit der Theorie überein?