1. LITERATUR

Demtröder; Tipler, Hering/Martin/Stohrer; Gerthsen

2. STICHPUNKTE

Rotation starrer Körper, Drehimpuls, Drehmoment, Trägheitsmoment, Hauptträgheitsachsen, kräftefreier -, schwerer Kreisel, Nutation, Präzession.

3. GRUNDLAGEN

Kreiselbewegungen findet man sowohl in großen Systemen wie der Erde, als auch in kleinen Systemen wie den Atomen, bei denen die Präzession in äußeren Feldern ganz analog behandelt wird. Die Theorie des Kreisels scheint schwierig zu sein, doch mit stark vereinfachenden Annahmen lassen sich die Grundlagen (hoffentlich) leichter verstehen:

1. Der Kreisel ist rotationssymmetrisch, d.h. zwei seiner Hauptträgheitsmomente J sind gleich:

$$J_1 = J_2 = J_D \,.$$

2. Die Rotation des Kreisels um seine Figurenachse (Hauptträgheitsmoment J_3) erfolgt sehr schnell im Vergleich zu allen anderen seiner Bewegungen.

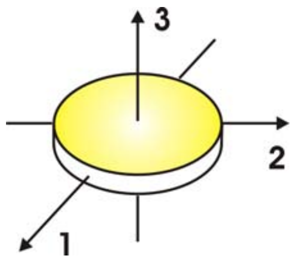

Abb. 1

Beantworten Sie bitte die folgenden Fragen:

1. Was ist ein symmetrischer -, was ein kräftefreier -, was ein schwerer Kreisel?
2. Was sind Trägheitsmomente, was sind Hauptträgheitsachsen?
   Mit welchen Größen lässt sich das Trägheitsmoment J_3 in Abb.1 für einen Zylinder berechnen?
3. Welcher Zusammenhang besteht zwischen:
   - Drehimpuls $\vec{L}$ und Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$;
   - Drehmoment $\vec{D}$ und Kraft $\vec{F}$;
   - Drehimpuls $\vec{L}$ und Drehmoment $\vec{D}$?
5. Wie versetzt man einen Kreisel in eine Nutationsbewegung und wie in eine Präzessionsbewegung?
4. Welcher der folgenden Sätze ist sinnvoll:
   - Fallen momentane Drehachse und Figurenachse nicht zusammen, so wirkt ein Drehmoment.
   - Fallen momentane Drehachse und Drehimpuls zusammen, so gibt es keine Nutation.
   - Fallen momentane Drehachse und Drehimpuls nicht zusammen, so präzidiert der Kreisel.
   - Fallen Drehimpuls und Figurenachse zusammen, dann ist die Figurenachse raumfest.

3.1. Präzession (schwerer Kreisel)

Der symmetrische kräftefreie Kreisel rotiere um seine Figurenachse. Ruht die Figurenachse im Raum, so zeigen auch die Drehimpulsachse und die momentane Drehachse in die gleiche Richtung. Wirkt jedoch ein Drehmoment $\vec{D}$ auf den Kreisel, so ändert sich der Drehimpuls $\vec{L}$ in der Zeit *dt* um

$$d\vec{L} = \vec{D}\,dt \tag{1}$$

1. Ist $\vec{D}$ parallel zu $\vec{L}$ gerichtet, dann ist es auch $d\vec{L}$, und der Kreisel wird abgebremst oder angetrieben.
2. Ist $\vec{D}$ senkrecht zu $\vec{L}$ gerichtet, dann ist auch $d\vec{L}$ senkrecht zu $\vec{L}$, und die Drehimpulsachse weicht in Richtung des Drehmomentes aus, also senkrecht zur wirkenden Kraft. Bei konstantem Drehmoment $\vec{D}$ überstreicht der Drehimpulsvektor $\vec{L}$ gleichförmig einen Kegel mit dem Öffnungswinkel 2α, er präzediert.

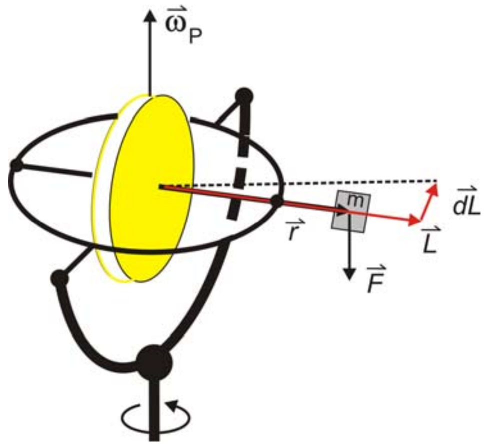

Abb. 2

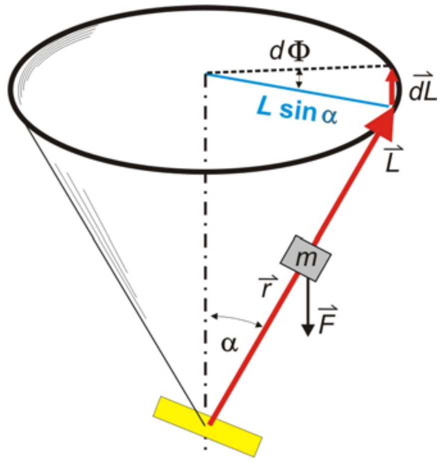

Abb. 3

Für die Winkelgeschwindigkeit der Präzession ω_p erhält man aus Abb. 3 und Gl. (1) $|\vec{\omega}_P| = \omega_p$

$$\omega_p = \frac{d\Phi}{dt}; \quad d\Phi = \frac{dL}{L\sin\alpha}; \quad \vec{D} = \vec{r}\times\vec{F}; \quad |\vec{D}| = D = r\,m\,g\sin\alpha \qquad \boxed{\omega_p = \frac{D}{L\sin\alpha} = \frac{r\,m\,g}{L} = \frac{r\,m\,g}{J_3\,\omega_3}} \tag{2}$$

3.2. Nutation (kräftefreier Kreisel)

Versetzt man dem um seine ruhende Figurenachse rotierenden Kreisel einen leichten Schlag auf den Rahmen, so trennt man damit das Zusammenfallen der drei Achsen, und man beobachtet eine nicht so leicht zu durchschauende Torkelbewegung des Kreisels. Die Figurenachse und die momentane Drehachse beschreiben je einen Kreiskegel um die Drehimpulsachse, die ihre Richtung im Raum behält (Abb. 6). Diesen gemeinsamen Umlauf bezeichnet man als Nutation.

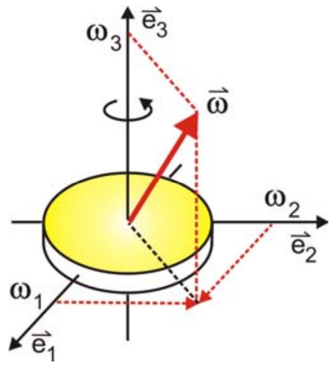

Abb. 4

Im körperfesten Koordinatensystem (Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ in Richtung der Hauptträgheitsachsen) lassen sich die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um die momentane Drehachse (Abb. 4) und der Drehimpuls $\vec{L}$ (Abb. 5) angeben:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega_1\,\vec{e}_1 + \omega_2\,\vec{e}_2 + \omega_3\,\vec{e}_3 \\ \vec{L} &= J_1\,\omega_1\,\vec{e}_1 + J_2\,\omega_2\,\vec{e}_2 + J_3\,\omega_3\,\vec{e}_3 \\ \vec{L} &= J_D\,(\omega_1\,\vec{e}_1 + \omega_2\,\vec{e}_2) + J_3\,\omega_3\,\vec{e}_3 \end{aligned} \tag{3}$$

mit $J_1 = J_2 = J_D$.

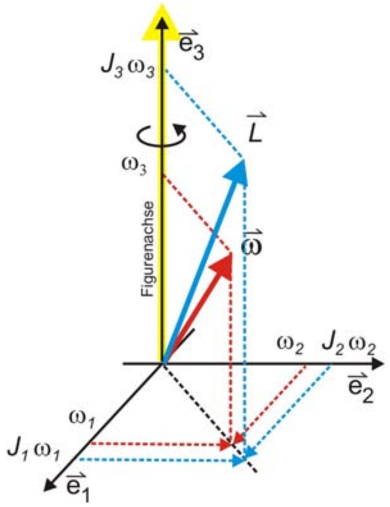

Abb. 5

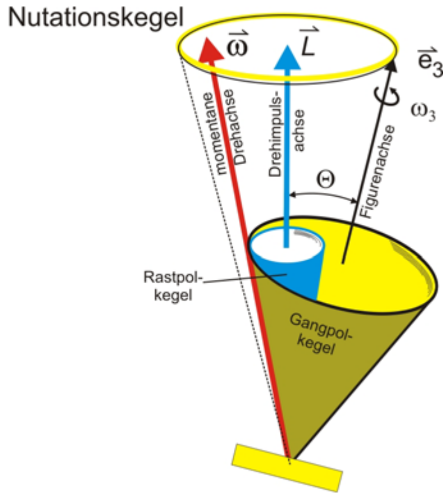

Abb. 6 Der Rastpolkegel ist raumfest. Der Gangpolkegel ist starr mit der Figurenachse verbunden, berührt den Rastpolkegel in der momentanen Drehachse ω und rollt auf ihm ab.

Umgekehrt lässt sich auch $\vec{\omega}$ in die Richtungen von $\vec{L}$ und $\vec{e}_3$ zerlegen:

$$\vec{\omega} = (\frac{1}{J_D})\vec{L} + (1 - \frac{J_3}{J_D})\,\omega_3\,\vec{e}_3 \tag{4}$$

Der erste Summand ist der Anteil von $\vec{\omega}$ in Richtung $\vec{L}$ (Rastpolkegel), der zweite Summand ist der Anteil von $\vec{\omega}$ in Richtung $\vec{e}_3$ (Gangpolkegel). Im Laborsystem beobachtet man die Bewegung der Figurenachse um die raumfeste Drehimpulsachse auf dem Nutationskegel (Öffnungswinkel 2Θ). Da alle drei Achsen, $\vec{\omega}$, $\vec{L}$ und $\vec{e}_3$, in einer Ebene liegen (Begründung?), lässt sich die Winkelgeschwindigkeit dieser Nutation ω_N durch den ersten Summanden in Gl. 4 beschrieben:

$$\omega_N = \frac{L}{J_D} \qquad \text{Mit } \vec{e}_3\,\vec{L} = \left|\vec{L}\right| \cos\Theta = J_3\,\omega_3 \qquad \text{(s.Gl. (3)) folgt:}$$

$$\omega_N = \frac{J_3\,\omega_3}{J_D \cos\Theta} \quad \text{und für kleine Öffnungswinkel näherungsweise:} \quad \boxed{\omega_N = \frac{J_3}{J_D}\,\omega_3} \tag{5}$$

4. VERSUCHSANORDNUNG

Der Kreisel ist kardanisch aufgehängt und besitzt zwei Freiheitsgrade. Er wird mit einem Motor angetrieben. Bei C lässt sich eine Stange D mit verschiebbarem Gewicht E einschrauben, um verschiedene Drehmomente zur Präzessionsbewegung zu erzeugen.

- Die Messung der Rotationsfrequenz f_3 und der Nutationsfrequenz f_N erfolgt induktiv. Dazu wird eine Spule vor kleine Magnete gehalten, die bei C auf der Rotationsachse und bei F am Rahmen angebracht sind. Die Spannungsimpulse werden mit einem Zähler registriert.
- Die Messung der Präzessionsumlaufzeit T_P erfolgt mit einer Stoppuhr.

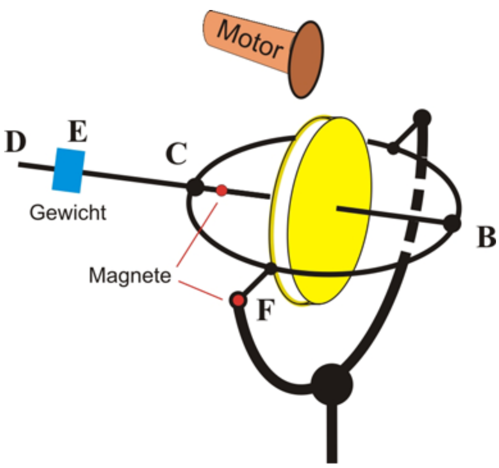

Abb. 7

5. MESSUNGEN, BEOBACHTUNGEN, AUSWERTUNG

Vorsicht: Bei schnell rotierendem Kreisel keine Spielerei!
Vorsicht: Lange Haare zusammenbinden, Abstand halten.
Halten Sie sich strikt an die Anleitung und fragen Sie im Zweifelsfall den Assistenten.

5.1. Beobachtung der Achsen

1. Figurenachse
   Fahren Sie den Kreisel mit dem Motor auf etwa 20 Hz hoch. Halten Sie den Rahmen ruhig. Alle drei Achsen fallen zusammen, der Kreisel ist ausgewuchtet.

2. Momentane Drehachse
   Drehen Sie die Scheibe mit drei Farbsegmenten (RGB) bei B auf den Rahmen und bringen Sie bei C ein Ausgleichsgewicht (Magnet) an, so dass die Figurenachse waagerecht ausgerichtet ist. Kreisel wieder auf etwa 20 Hz anwerfen, Rahmen ruhig halten. Beobachtung? Geben Sie dann dem Rahmen bei A einen Schlag von oben. Der Kreisel fängt an zu torkeln. Was beobachten Sie jetzt? Wiederholen Sie den Versuch mit der Scheibe, auf der Text aufgeklebt ist.

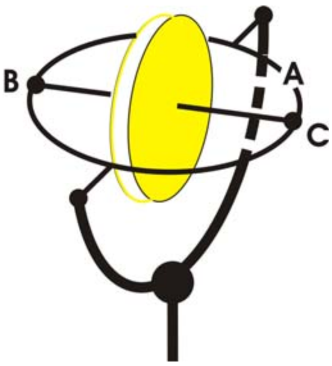

Abb. 8

5.2. Bestimmung des Trägheitsmomentes J_3

1. Bestimmen Sie J_3 aus Pendelschwingungen. Hängen Sie dazu einen Magneten an den Umfang des Kreisels wie in Abb. 9. Für nicht zu große Auslenkungen messen Sie die Schwingungsdauer T für 3 Perioden (Mittelwert $\bar{T}$ aus 6 Messungen).

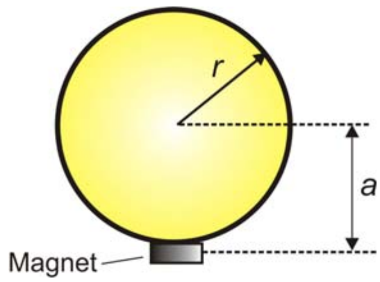

Abb. 9

Aus

$$J_3 \cong J_{\text{Gesamt}} - J_{\text{Magnet}}$$

$$J_{\text{Magnet}} = m\,a^2$$

$$J_{Gesamt} = \left(\frac{\bar{T}^2}{4\pi^2}\right) m\,g\,a$$

m: Masse des Magneten (wiegen)
a: Abstand von der Drehachse

lässt sich J_3 ermitteln.

2. Berechnen Sie J_3 aus den geometrischen Abmessungen.
   Berücksichtigen Sie dabei nur den Rotationszylinder (Messschieber benutzen).

   Dicke d = Radius r = Dichte $\rho_{Stahl} = 7{,}86\,\frac{g}{cm^3}$

3. Vergleichen Sie beide Ergebnisse.

5.3. Einfluss der Reibung

Reibungsmomente, die zur Winkelgeschwindigkeit proportional sind, bewirken:

1. Die Winkelgeschwindigkeit ω_3 um die Figurenachse nimmt exponentiell ab:

$$\omega_3 = \omega_{30}\, e^{-\beta t}$$

2. Die Öffnung des Nutationskegels verengt sich.
   Diesen 2. Punkt können Sie bei den noch folgenden Versuchen beobachten.

Versuch zu 1.: Kreisel anwerfen, Rahmen ruhig halten, Umdrehungszahl ca. 50 Hz.
Messen Sie 15 Minuten lang in 1-Minuten-Abständen die Umlaufzeit T_3 .

Auswertung: Tragen Sie die Umlaufzeit T_3 als Funktion der Zeit auf halblogarithmisch (Papier als pdf-file im Netz: Versuche/Graphen-Papier) auf und bestimmen Sie daraus die Dämpfung β.

Vorsicht: Machen Sie mit dem schnell rotierenden Kreisel keinen Unfug.

5.4. Präzession

1. Werfen Sie den Kreisel auf ca. 50 Hz an, und drücken Sie vorsichtig bei B (Abb. 7) mit dem Daumen von oben auf den Rahmen. Warum ändert sich die Drehrichtung der Präzession, wenn Sie bei C drücken? Benutzen Sie einen Magneten als Zusatzgewicht.
2. Die in 3.1 beschriebenen Verhältnisse beobachtet man nur unter sehr speziellen Anfangsbedingungen. Drehen Sie die Stange D in den Kreiselrahmen und bringen Sie bei B ein Ausgleichsgewicht zur Stange an (kräftefrei). Machen Sie dann den Kreisel mit der Zusatzmasse E weiter außen schwer und werfen Sie ihn auf ca. 30 Hz an. Wenn Sie das Stangenende D zunächst noch fest halten, beobachten Sie beim plötzlichen Loslassen eine Bewegung der Figurenachse wie in Abb. 10. Können Sie das deuten?
   Vorsicht: Die Stange braucht viel Platz beim Rotieren.
3. Reguläre Präzession ohne Nutation beobachten Sie nur, wenn Sie den Kreisel nicht wie eben fallenlassen sondern waagerecht mit der geeigneten Geschwindigkeit in die Richtung mit der Hand führen, in die er anfangen wird zu präzedieren. Bestimmen Sie so die Abhängigkeit der Präzessionszeit T_p von der mittleren Kreiselfrequenz f_3.

Verfahren:

1. Drehmoment bestimmen
   (Abstand und Gewicht der Zusatzmasse messen)
2. Kreisel anwerfen, ca. 40 Hz
3. f_3 messen
4. Kreisel waagerecht in Präzessionsrichtung führen, so dass er nicht mehr herunterfällt
5. T_P aus 2 Umläufen (Stoppuhr)
6. Präzessionsbewegung von Hand anhalten
7. f_3 bestimmen und 4., 5., 6. wiederholen bis herunter zu ca. 15 Hz. Mindestens 6 Messwerte.

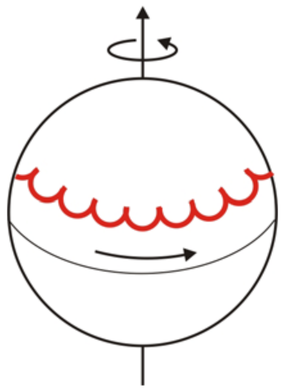

Abb. 10

Auswertung:

Wiederholen Sie die Messung für zwei weitere, verschiedene Drehmomente, und tragen Sie grafisch T_P gegen f_3 auf mit dem Parameter Drehmoment.

4. Überzeugen Sie sich davon, dass die Präzessionszeit T_P unabhängig vom Neigungswinkel α ist (Abb. 3).

Verfahren:

1., 2., 3. wie unter 5.4.3.

4. Figurenachse anheben und in Präzessionsrichtung führen.
5. T_P aus 2 Umläufen bestimmen und Neigungswinkel α abschätzen.
6. f_3 bestimmen.
7. Wiederholen Sie die Messung für zwei weitere Neigungswinkel α, mindestens 2 Messwerte. Eventuell vor jeder Messung den Kreisel wieder hochfahren.

Auswertung:

Grafische Darstellung $T_P(f_3)$ mit α als Parameter.

5.5. Nutation

Verfahren:

1. Kreisel auf ca. 30 Hz hochfahren, Figurenachse waagerecht halten.
2. f_3 messen.
3. Nutation erzeugen wie bei 5.1.2. beschrieben.
4. Nutationsfrequenz f_N mit der Induktionsspule bestimmen (Magnet F: Abb. 7).
   Vorsicht: Wählen Sie den Abstand nicht zu groß, damit die Messapparatur noch sicher anspricht (Lampe muss flackern).
5. Nutationsbewegung von Hand unterbrechen und f_3 erneut bestimmen.
6. Punkte 3., 4., 5. wiederholen für 6 verschiedene Frequenzen f_3.

Auswertung:

Tragen Sie sofort und zur Kontrolle grafisch f_N gegen f_3 auf.

5.6. Trägheitsmoment J_3

Aus der grafischen Darstellung $T_P(f_3)$ in 5.4.3 bestimmen Sie die Steigungen der Geraden und damit nach Gl. (2) aus 3.1 die Trägheitsmomente J_3. Vergleichen Sie den Mittelwert J_3 dieser Messungen mit denen unter 5.2 gewonnenen Ergebnissen.
Wie groß ist die Rotationsenergie des Kreisels bei 50 Hz?

5.7. Trägheitsmoment J_D

Aus den Messungen 5.5 lässt sich das Verhältnis J_3 / J_D bestimmen (s. Gl. (5)).
Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Verhältnis, das Sie mit J_3 aus 5.2.1. und

$$J_D = \frac{M}{12} d^2 + \frac{\pi}{4} d \rho r^4$$

Bezeichnungen wie in 5.2
M: Gesamtmasse

berechnen. Die Verhältnisse stimmen vermutlich nicht sonderlich gut überein. Was könnte der Grund dafür sein?