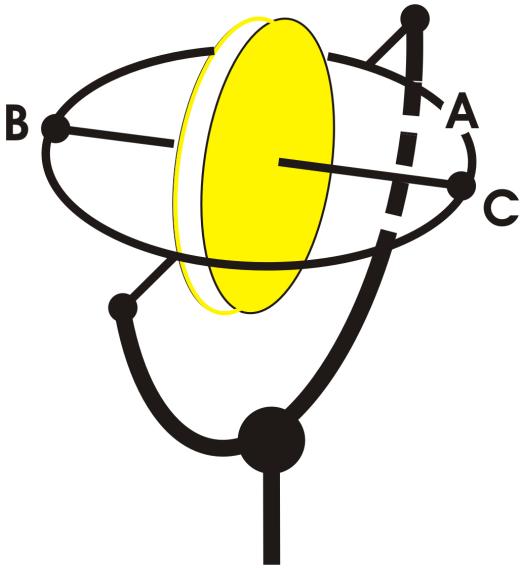


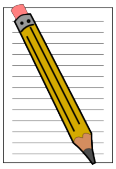

# Kreisel

In diesem Versuch lernen Sie die Bewegungsgleichungen starrer rotierender Körper. Insbesondere die Bewegung eines Kreisels soll hier untersucht werden. Kreiselbewegungen findet man sowohl in großen Systemen wie der Erde, als auch in kleinen Systemen wie den Atomen, bei denen die Präzession in äußeren Feldern ganz analog behandelt wird.

## Schriftliche VORbereitung:

Beantworten Sie bitte die folgenden Fragen:

- Was ist ein symmetrischer-, was ein kräftefreier-, was ein schwerer Kreisel?
- Was sind Trägheitsmomente, was sind Hauptträgheitsmomente? Wie lässt sich das Trägheitsmoment $J_3$ in Abb. 1 für einen Zylinder berechnen?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen:
  - Drehimpuls $\vec{L}$ und Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$;
  - Drehmoment $\vec{M}$ und Kraft $\vec{F}$;
  - Drehimpuls $\vec{L}$ und Dremoment $\vec{M}$?



- Welcher der folgenden Sätze ist sinnvoll:
  - Fallen momentane Dreachse und Drehimpuls zusammen, so zeigt auch die Figurachse in diese Richtung.
  - Fallen momentane Drehachse und Drehimpuls zusammen, so dreht sich der Kreisel nicht mehr.
  - Fallen momentane Dreachse und Dreimpule nicht zusammen, so rotieren Figurenachse und momentane Drehachse um die raumfeste Drehimpulsachse.
  - Die Figurenachse ist nur dann raumfest, wenn der Drehimpuls mit der Figurenachse zusammenfällt.
- Wie versetzt man einen Kreisel in eine Nutationsbewegung und wie in eine Präzessionsbewegung?

# 1 Grundlagen

Die Theorie des Kreisels scheint schwierig zu sein, doch mit stark vereinfachenden Annahmen lassen sich die Grundlagen (hoffentlich) leichter verstehen:

1. Der Kreisel ist rotationssymmetrisch, d. h zwei seiner Hauptträgheitsmomente $J$ sind gleich:

$$J_1 = J_2 = J_D.$$

2. Die Rotation des Kreisels um seine Figurenachse (Hauptträgheitsmoment $J_3$) erfolgt sehr schnell im Vergleich zu allen anderen seiner Bewegungen.

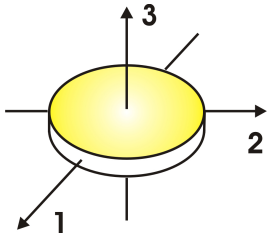



**Abbildung 1**

## 1.1 Präzession (schwerer Kreisel)

Der symmetrische kräftefreie Kreisel rotiere um seine Figurenachse. Ruht die Figurenachse im Raum, so zeigen auch die Drehimpulsachse und die momentane Drehachse in die gleiche Richtung. Wirkt jedoch ein Drehmoment $\vec{M}$ auf den Kreisel, so ändert sich der Drehimpuls $\vec{L}$ in der Zeit $dt$ um

$$d\vec{L} = \vec{M}\, dt \tag{1}$$

1. Ist $\vec{M}$ parallel zu $\vec{L}$ gerichtet, dann ist es auch $d\vec{L}$, und der Kreisel wird abgebremst oder angetrieben.
2. Ist $\vec{M}$ senkrecht zu $\vec{L}$ gerichtet, wie in Abbildung 2 dargestellt, dann ist auch $d\vec{L}$ senkrecht zu $\vec{L}$, und die Drehimpulsachse weicht in Richtung des Drehmomentes aus, also senkrecht zur wirkenden Kraft. Bei konstantem Drehmoment $\vec{M}$ überstreicht der Drehimpulsvektor $\vec{L}$ gleichförmig einen Kegel mit dem Öffnungswinkel $2\alpha$, er präzediert.

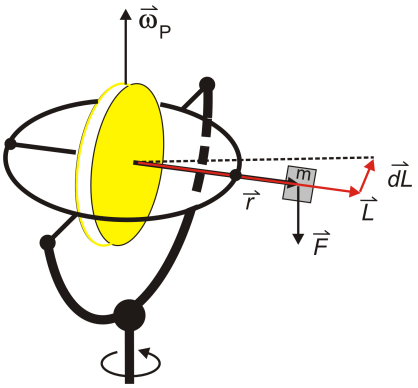



**Abbildung 2**

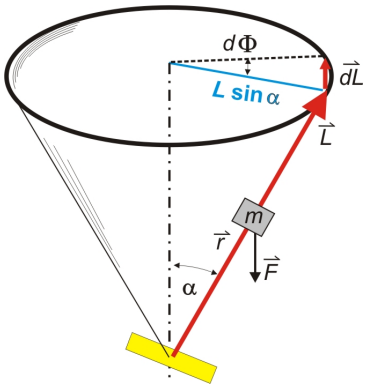



**Abbildung 3**

Für die Winkelgeschwindigkeit der Präzession $\omega_p$ erhält man aus Abb. 3 und Gl. (1) $|\vec{\omega}_p| = \omega_p$

$$\omega_p = \frac{d\Phi}{dt}; \quad d\Phi = \frac{dL}{L\sin\alpha}; \quad \vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}; \quad |\vec{M}| = M = rF\sin\alpha$$

$$\boxed{\omega_p = \frac{M}{L\sin\alpha} = \frac{rF}{L} = \frac{rF}{J_3\omega_3}} \tag{2}$$

## 1.2 Nutation (kräftefreier Kreisel)

Versetzt man dem um seine ruhende Figurenachse rotierenden Kreisel einen leichten Schlag auf den Rahmen, so trennt man damit das Zusammenfallen der drei Achsen, und man beobachtet eine nicht so leicht zu durchschauende Torkelbewegung des Kreisels. Die Figurenachse und die momentane Drehachse beschreiben je einen Kreiskegel um die Drehimpulsachse, die ihre Richtung im Raum behält (Abb. 6). Diesen gemeinsamen Umlauf bezeichnet man als Nutation.

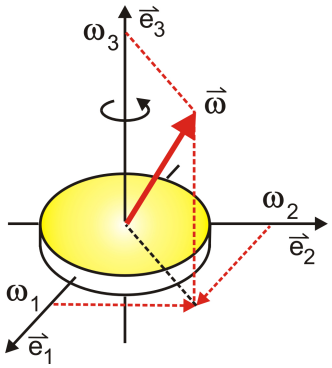



**Abbildung 4**

Im körperfesten Koordinatensystem (Einheitsvektor $\vec{e}_i$ in Richtung der Hauptträgheitsachsen) lassen sich die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um die momentane Drehachse (Abb. 4) und der Drehimpuls $\vec{L}$ (Abb. 5) angeben:

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \omega_1\vec{e}_1 + \omega_2\vec{e}_2 + \omega_3\vec{e}_3\\ \vec{L} &= J_1\omega_1\vec{e}_1 + J_2\omega_2\vec{e}_2 + J_3\omega_3\vec{e}_3\\ \vec{L} &= J_D(\omega_1\vec{e}_1 + \omega_2\vec{e}_2) + J_3\omega_3\vec{e}_3 \qquad (3)\end{aligned}$$

mit $J_1 = J_2 = J_D$.

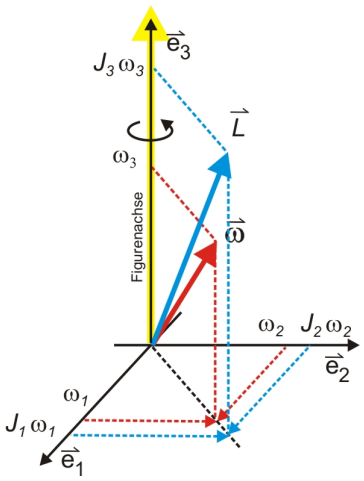



**Abbildung 5**

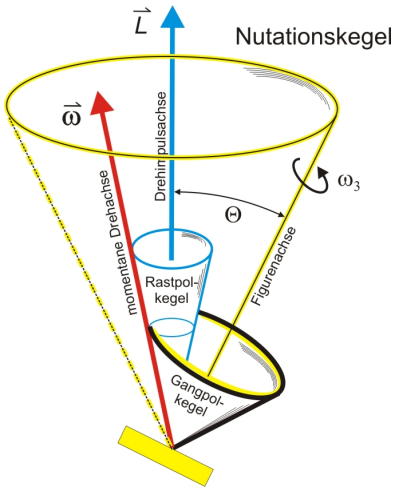



**Abbildung 6:** Der Rastpolkegel ist raumfest. Der Gangpolkegel ist starr mit der Figurenachse verbunden, berührt den Rastpolkegel in der momentanen Drehachse $\omega$ und rollt auf ihm ab.

Umgekehrt lässt sich auch $\vec{\omega}$ in die Richtung von $\vec{L}$ und $\vec{e}_3$ zerlegen:

$$\vec{\omega} = \left(\frac{1}{J_d}\right)\vec{L} + \left(1 - \frac{J_3}{J_D}\right)\omega_3\vec{e}_3 \qquad (4)$$

Der erste Summand ist der Anteil von $\vec{\omega}$ in Richtung $\vec{L}$ (Rastpolkegel), der zweite Summand ist der Anteil von $\vec{\omega}$ in $\vec{e}_3$ (Gangpolkegel). Im Laborsystem beobachtet man die Bewegung der Figurenachse um die raumfeste Drehimpulsachse auf dem Nutationskegel (Öffnungswinkel $2\Theta$). Da alle drei Achsen, $\vec{\omega}$, $\vec{L}$ und $\vec{e}_3$, in einer Ebene liegen (Begründung?), lässt sich die Winkelgeschwindigkeit dieser Nutation $\omega_N$ durch den ersten Summanden in Gl. (4) beschrieben:

$$\omega_N = \frac{L}{J_D}$$

Mit $\vec{e}_3\vec{L} = |\vec{L}|\cos\Theta = J_3\omega_3$ (siehe Gl. (3)) folgt:

$$\omega_N = \frac{J_3\omega_3}{J_D\cos\Theta}$$

und für kleine Öffnungswinkel näherungsweise:

$$\boxed{\omega_N = \frac{J_3}{J_D}\omega_3} \tag{5}$$

## 2 Versuchsanordnung

Der Kreisel ist kardanisch aufgehängt und besitzt zwei Freiheitsgrade. Er wird mit einem Motor angetrieben. Bei C lässt sich eine Stange D mit verschiebbarem Gewicht E einschrauben, um verschiedene Drehmomente zur Präzessionsbewegung zu erzeugen.

- Die Messung der Rotationsfrequenz $f_3$ und der Nutationsfrequenz $f_N$ erfolgt induktiv. Dazu wird eine Induktionsspule vor kleine Magnete gehalten, die bei C auf der Rotationsachse und bei F angebracht sind.
- Die Messung der Präzessionsumlaufzeit $T_P$ erfolgt mit einer Stoppuhr.

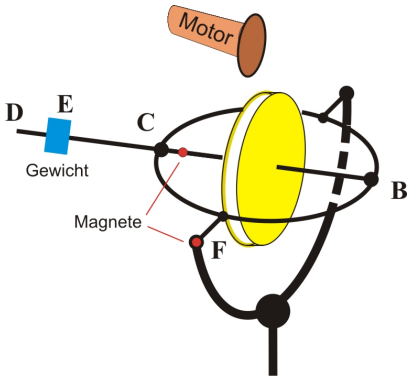



**Abbildung 7**

## 3 Messungen, Beobachtungen, Auswertungen

Sicherheitshinweise:

- Keine Spielerei bei schnell rotierenden Kreisel!
- Lange Haare zusammenbinden!
- Halsketten ablegen!
- Kapuzensenkel nach innen!

Halten sie sich strikt an die Anleitung und fragen Sie im Zweifelsfall den Tutor.

## 3.1 Beobachtung der Achsen

(M1) Figurenachse
Werfen Sie den Kreisel mit der Hand an. Halten Sie den Rahmen ruhig. Alle drei Achsen fallen zusammen.

(M2) Momentane Drehachse
Scheibe mit drei Farbsegmenten (RGB) bei B aufdrehen und bei C Ausgleichsgewicht (Magnet) anbringen, so dass die Figurenachse waagerecht ausgerichtet ist. Kreisel anwerfen, Rahmen ruhig halten. Beobachtung? Geben Sie dann dem Rahmen bei A einen kleinen Schlag von oben. Der Kreisel fängt an zu torkeln. Was beobachten Sie jetzt? Wiederholen Sie den Versuch mit der Scheibe, auf der Text aufgeklebt ist.

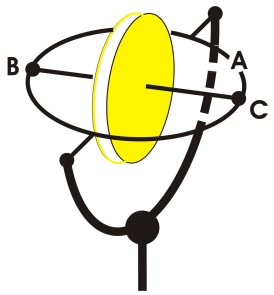


**Abbildung 8**

(A1) Beschreiben Sie Ihre Beobachtungen und erklären Sie diese.

## 3.2 Bestimmung des Trägheitsmomentes $J_3$

(M3) Bestimmen Sie $J_3$ aus Pendelschwingungen. Hängen Sie dazu einen Magneten an den Umfang des Kreisels wie in Abb. 9. Für nicht zu große Auslenkungen messen Sie die Schwingungsdauer $T$ für 3 Perioden (Mittelwert $\overline{T}$ aus 6 Messungen).

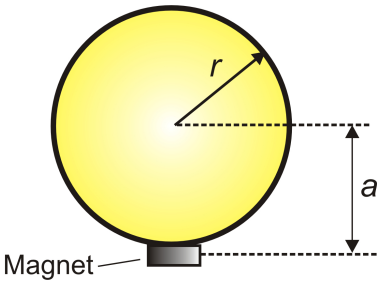



**Abbildung 9:** Aufbau zur Bestimmung des Trägheitsmomentes $J_3$

Aus folgender Rechnung lässt sich $J_3$ ermitteln:

$$J_3 \cong J_{\text{Gesamt}} - J_{\text{Magnet}}$$

$$J_{\text{Magnet}} = ma^2$$

$$J_{\text{Gesamt}} = \left(\frac{\overline{T}^2}{4\pi^2}\right) mga$$

$m$: Masse des Magneten (wiegen)

$a$: Abstand von der Drehachse

(M4) Messen Sie die notwendigen Dimensionen des Kreisels um das Trägheitsmoment des Rotationszylinders zu berechnen.

Dicke $d =$ Radius $r =$ Dichte $\rho_{\text{Stahl}} = 7.86\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

(A2) Berechnen Sie $J_3$ aus den geometrischen Abmessungen.

(A3) Berechnen Sie $J_3$ aus den Ergebnissen von (M3).

(A4) Vergleichen Sie beide Ergebnisse.

## 3.3 Einfluss der Reibung

Reibungsmomente, die zur Winkelgeschwindigkeit proportional sind, bewirken:

1. Die Winkelgeschwindigkeit $\omega_3$ um die Figurenachse nimmt exponentiell ab:

$$\omega_3 = \omega_{30} \cdot e^{-\beta t}$$

2. Die Öffnung des Nutationskegels verengt sich.
   Diesen 2. Punkt können Sie bei den noch folgenden Versuchen beobachten.

(M5) Kreisel anwerfen, Rahmen ruhig halten, Umdrehungszahl ca. 30 Hz. Messen Sie in 2-Minuten-Abständen die Umlaufzeit $T_3$ bis herunter zu ca. 20 Hz.

(A5) Tragen Sie die Umlaufzeit $T_3$ als Funktion der Zeit halblogarithmisch auf und bestimmen sie daraus die Dämpfung $\beta$.

## 3.4 Präzession

(M6) Werfen Sie den Kreisel auf ca. 50 Hz an, und drücken Sie vorsichtig bei B (Abb. 7) mit dem Daumen von oben auf den Rahmen. Benutzen Sie einen Magneten als Zusatzgewicht.

(A6) Warum ändert sich die Drehrichtung der Präzession, wenn Sie bei C drücken?

Die in 1.1 beschriebenen Verhältnisse beobachtet man nur unter sehr speziellen Anfangsbedingungen.

(M7) Machen Sie den Kreisel mit der Stange D und der Zusatzmasse E weiter außen schwer und werfen Sie auf ca. 30 Hz an. Wenn Sie das Stangenende D zunächst noch fest halten, beobachten Sie beim plötzlichen Loslassen eine Bewegung der Figurenachse wie in Abb. 10.
Vorsicht: Die Stange braucht viel Platz beim Rotieren.

(A7) Deuten Sie diese Bewegung und erklären Sie diese in Ihren eigenen Worten.

Reguläre Präzession ohne Nutation beobachten Sie nur, wenn Sie den Kreisel nicht wie eben fallenlassen sondern waagerecht mit der geeigneten Geschwindigkeit in die Richtung mit der Hand führen, in die er anfangen wird zu präzedieren.

(M8) Machen Sie den Kreisel mit der Stange D und der Zusatzmasse E weiter außen schwer und (falls der Kreisel nicht ohnehin noch vom vorigen Versuch mit etwa 30 Hz rotiert) beschleunigen Sie den Kreisel auf etwa 30 Hz. Versetzen Sie das System wie beschrieben in eine reine Präzessionsbewegung. Bestimmen Sie die Abhängigkeit der Präzessionszeit $T_P$ von der mittleren Kreiselfrequenz $f_3$.
Wiederholen Sie die Messung für zwei weitere, verschiedene Drehmomente.

**Verfahren (M8):**

1. Drehmoment bestimmen (Federwaage, Meßlatte)
2. Kreisel anwerfen, ca. 40 Hz
3. $f_3$ messen
4. Kreisel waagerecht in Präzessionsrichtung führen, so dass er nicht mehr herunterfällt
5. $T_P$ aus 2 Umläufen (Stoppuhr)
6. Präzessionsbewegung von Hand anhalten
7. $f_3$ bestimmen und 4., 5., 6., wiederholen bis herunter zu ca. 15 Hz. Mindestens 6 Messwerte.

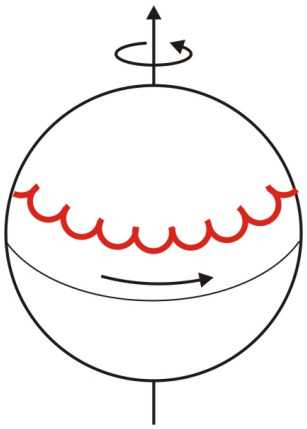


**Abbildung 10**

(A8) Tragen Sie grafisch $T_P$ gegen $f_3$ mit dem Parameter Drehmoment auf.

(M9) Überzeugen Sie sich davon, dass die Präzessionszeit $T_P$ unabhängig vom Neigungswinkel $\alpha$ ist (vgl. Abbildung 3).

**Verfahren (M9):**

1. 1., 2., 3. wie unter (M8) durchführen.
2. Figurenachse neigen und in Präzessionsrichtung führen.
3. $T_P$ aus 2 Umläufen bestimmen und Neigungswinkel $\alpha$ abschätzen.
4. $f_3$ bestimmen.
5. Wiederholen Sie die Messung für zwei weitere Neigungswinkel $\alpha$, mindestens 2 Messwerte.

(A9) Grafische Darstellung $T_P(f_3)$ mit $\alpha$ als Parameter.

## 3.5 Nutation

(M10) **Verfahren:**

1. Kreisel auf ca. 30 Hz hochfahren, Figurenachse waagerecht halten.
2. $f_3$ messen.
3. Nutation erzeugen wie bei (M7) beschrieben.
4. Nutationsfrequenz $f_N$ mit der Induktionsspule bestimmen.
   Vorsicht: Halten Sie mit der Spule genügend Abstand. Wählen Sie den Abstand aber auch nicht zu groß, damit die Messapparatur noch sicher anspricht (Lampe muss flackern).
5. Nutationsbewegung von Hand unterbrechen und $f_3$ erneut bestimmen.
6. Punkte 3., 4., 5. wiederholen und für 6 verschiedene Frequenzen $f_3$.

(A10) Tragen Sie sofort und zur Kontrolle grafisch $f_N$ gegen $f_3$ auf.

## 3.6 Trägheitsmoment $J_3$

(A11) Aus der grafischen Darstellung $T_P(f_3)$ in (M8) bestimmen Sie die Steigung der Geraden und damit nach Gl. (2) aus 1.1 die Trägheitsmomente $J_3$. Vergleichen Sie den Mittelwert $J_3$ dieser Messungen mit den unter 3.2 gewonnen Ergebnissen.

(A12) Wie groß ist die Rotationsenergie des Kreisels bei 50 Hz?

## 3.7 Trägheitsmoment $J_D$

Aus den Messungen 3.5 lässt sich das Verhältniss $J_3/J_D$ bestimmen (siehe Gl. (5)). Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Verhältnis, das Sie mit $J_3$ aus (M3) und

$$J_D = \frac{M}{12}d^2 + \frac{\pi}{4}d\rho r^4$$

Bezeichnung wie in 3.2
$M$: Gesamtmasse

berechnen. Die Verhältnisse stimmen vermutlich nicht sonderlich gut überein. Was könnte der Grund dafür sein?