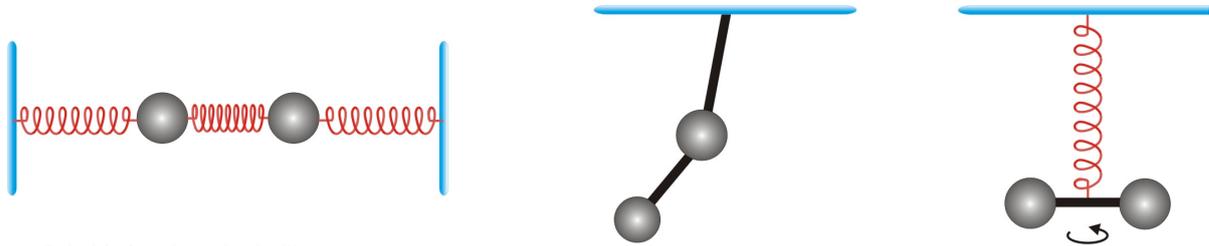


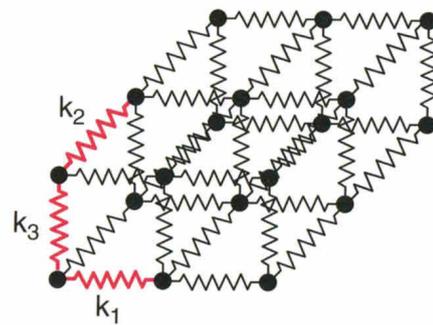
# A03 Gekoppelte Pendel



1 Beispiele für gekoppelte Oszillatoren

## Ziele

Zahlreiche Phänomene der Physik lassen sich im Rahmen eines Modells gekoppelter Oszillatoren beschreiben: Die Anregung molekularer Schwingungs- und Rotationszustände, gekoppelte Moden beim Laser, das Matratzenmodell in der Festkörperphysik, d. i. ein Kristall aus regelmäßig angeordneten Massepunkten, die alle mit ihren nächsten Nachbarn durch Federn gekoppelt sind (Abb. 2).



2 Feder-Masse-Modell des Festkörpers

Während beim einfachen Schwinger *eine* Variable zur Beschreibung der Bewegung ausreicht (z. B. der Drehwinkel) benötigen Sie für zwei gekoppelte Pendel bereits mindestens zwei Variablen, entsprechend der wenigstens zwei Freiheitsgrade solcher Systeme. Im Allgemeinen ist ihre Bewegung sehr kompliziert und unübersichtlich. Man kann jedoch zeigen, dass man für solche Systeme mit zwei Freiheitsgraden (bei linearen Bewegungsgleichungen) die allgemeine Bewegung stets als eine Überlagerung von nur zwei unabhängigen, einfachen harmonischen Schwingungen (den Normalmoden) beschreiben kann.

Wir werden uns zunächst mit der einfachen harmonischen Schwingung (Abb. 3) beschäftigen und dann ein gekoppeltes System wie in Abb. 4 untersuchen. Dabei werden folgende Näherungen eingehen:

1. Die Auslenkung  $\Phi$  sei so klein, dass  $\sin \Phi \approx \Phi$  gilt (harmonische Näherung).
2. Dämpfungseffekte werden vernachlässigt.
3. Die Bewegung findet in einer Ebene statt, d. h. alle physikalischen Größen können skalar behandelt werden (Drehmoment, Winkel etc.). Auslenkungen nach rechts (= Drehung nach links) werden positiv gezählt.

Die Auslenkungen der Pendel werden mit Hallsensoren in elektrische Spannungen umgesetzt und über einen Analog-Digital-Wandler mit einem Messsystem (CassyLab) registriert. Der zeitliche Verlauf der Pendelschwingungen kann so mit einem PC graphisch dargestellt, ausgedruckt und ausgewertet werden.

## Zur Vorbereitung: Folgende Zusammenhänge und Begriffe sollten Ihnen klar sein

Hookesches Gesetz, harmonischer Oszillator, gekoppelte Oszillatoren, Drehmoment, Trägheitsmoment, gekoppelte Differentialgleichungen, Anfangsbedingungen, Normalschwingungen, Schwebung

## Literatur

Lehrbücher der Physik (Demtröder; Tipler, Gerthsen, Hering/Martin/ Stohrer)

## Grundlagen

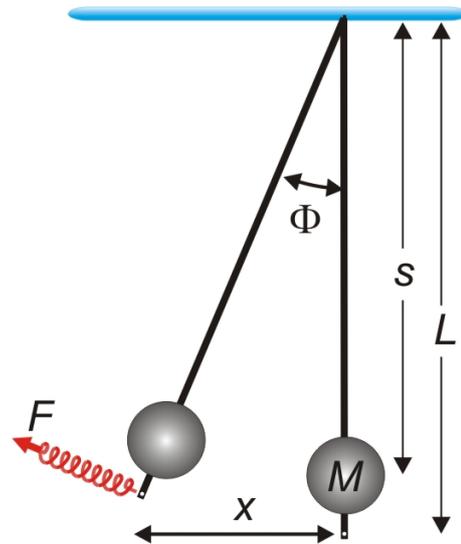
### Pendel

Analog zur Federkonstanten bei der Federdehnung nach dem Hookeschen Gesetz führt man bei Drehbewegungen die so genannte *Winkelrichtgröße*  $D_R$  ein ( $M$  ist das Drehmoment,  $\Phi$  der Drehwinkel):

$$M = -D_R \Phi . \quad (1)$$

Auch beim Stangenpendel im Schwerfeld der Erde (Abb. 3) gilt bei kleinen Amplituden die harmonische Näherung  $M = D_R \Phi$ . Die Kreisfrequenz ergibt sich aus  $D_R$  und dem Trägheitsmoment  $J$  zu

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D_R}{J}} . \quad (2)$$



3 Das Stangenpendel

### Aufgaben

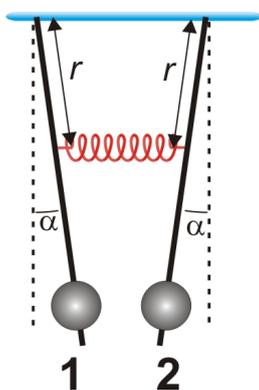
1. Wie groß ist die Winkelrichtgröße  $D_R$  für ein mathematisches Pendel (Abb. 3, mit masseloser Stange)?
2. Wie lässt sich  $D_R$  für das physikalische Pendel (Abb. 3, Stange der Masse  $m_s$ ) experimentell aus der Auslenkung  $x$  mit einem Kraftmesser bestimmen, der die Kraft  $F$  misst? Nutzen Sie dazu die Beziehungen

$$\frac{x}{L} = \sin \Phi \approx \Phi; M = F \cdot L .$$

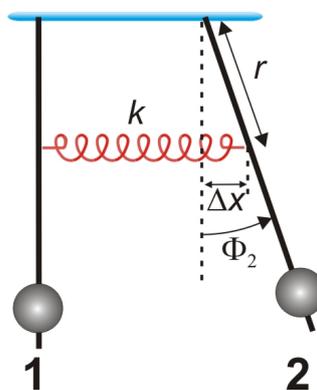
3. Leiten Sie Gleichung (1) aus der Bewegungsgleichung ab.

## Gekoppelte Pendel

Die Kopplung bewirkt, dass sich die beiden Pendel nicht mehr unabhängig voneinander bewegen; dabei können ausgesprochen verwickelte Bewegungsformen entstehen. Zu Beginn der Arbeit lassen Sie Pendel ein wenig schwingen, um ein Gefühl dafür zu bekommen, was alles passieren kann.

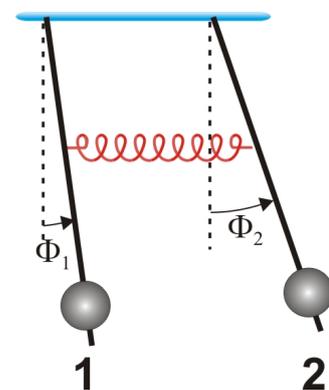


4



5

Kopplung der Pendelbewegungen



6

### Analyse der Bewegungen

Sind die Pendel in Ruhe, unterscheiden sich die Ruhelagen (bei identischen Pendeln) um den Winkel  $\alpha$  von der Vertikalen (Abb. 4). Bringt man beide Pendel in die Vertikale, so wirkt daher auf beide ein konstantes Drehmoment  $M_0$ , (1. Pendel:  $M_0$ , 2. Pendel:  $-M_0$ ). Lässt man nun Pendel 1 in der vertikalen Stellung (s. Abb. 5) und lenkt Pendel 2 um  $\Phi_2$  aus, so vergrößert sich das Drehmoment  $M$  auf Pendel 1 um

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}; F = -k \cdot r \Rightarrow M = r \cdot k \cdot \Delta x \approx r^2 k \Phi_2$$

Mit Gl. 1 erhalten Sie so die Federrichtgröße:  $D_F = M / \Phi_2 = r^2 \cdot k$ .

Lenkt man jetzt auch noch Pendel 1 aus (Abb. 6), so verringert sich das Drehmoment durch die geringere Auslenkung der Feder um  $-D_F \cdot \Phi_1$ , gleichzeitig tritt aber noch ein rücktreibendes Drehmoment durch die Schwerkraft auf:  $-D_R \cdot \Phi_1$ , so dass insgesamt die folgenden Drehmomente wirken:

$$\text{Pendel 1: } M_1 = M_0 - D_R \cdot \Phi_1 + D_F(\Phi_2 - \Phi_1)$$

$$\text{Pendel 2: } M_2 = -M_0 - D_R \cdot \Phi_2 - D_F(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (3)$$

Das Ruhelagemoment  $M_0$  stört noch. Bezieht man die Momente insgesamt nicht auf die Vertikal, sondern auf die Ruhelage ( $\Psi_1 = \Phi_1 - \alpha$  und  $\Psi_2 = \Phi_2 + \alpha$ ), vereinfachen sich die Momentengleichungen:

$$\text{Pendel 1: } M_1 = -D_R \cdot \Psi_1 + D_F(\Psi_2 - \Psi_1)$$

$$\text{Pendel 2: } M_2 = -D_R \cdot \Psi_2 - D_F(\Psi_2 - \Psi_1).$$

Setzen Sie die Trägheitsmomente ein, bekommen Sie die Bewegungsgleichungen:

$$\text{Pendel 1: } M_1 = J_1 \cdot \ddot{\Psi}_1 = -D_R \Psi_1 + D_F(\Psi_2 - \Psi_1)$$

$$\text{Pendel 2: } M_2 = J_2 \cdot \ddot{\Psi}_2 = -D_R \Psi_2 - D_F(\Psi_2 - \Psi_1).$$

### Normalkoordinaten – Normalschwingungen

Unangenehm an diesen Differentialgleichungen ist, dass sie gekoppelt sind (über die Feder, hier erkennbar durch  $D_F$ ). Da Sie die Pendel jedoch kalibriert haben, gilt  $J_1 = J_2 = J$  und Sie können die Gleichungen entkoppeln, wenn Sie die *Normalkoordinaten* einführen, die die Summe der Auslenkungen beschreiben ( $\xi = \Psi_1 + \Psi_2$ ) und deren Differenz ( $\eta = \Psi_1 - \Psi_2$ ):

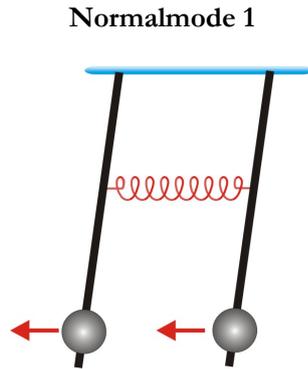
$$J \cdot \ddot{\xi} = -D_R \xi \quad \text{und} \quad J \cdot \ddot{\eta} = -(D_R + 2D_F) \eta. \quad (4)$$

Die Lösung der Bewegungsgleichungen ist nun nicht mehr schwierig:

$$\xi(t) = \Psi_1 + \Psi_2 = \Phi_1 \cos(\omega_\xi t + \varphi_\xi) \quad \text{und} \quad \eta(t) = \Psi_1 - \Psi_2 = \Phi_2 \cos(\omega_\eta t + \varphi_\eta). \quad (5)$$

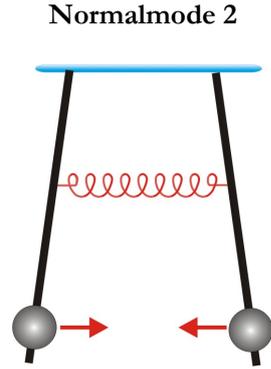
$$\omega_\xi = \sqrt{\frac{D_R}{J}} \quad \text{und} \quad \omega_\eta = \sqrt{\frac{D_R + 2D_F}{J}} = \omega_\xi \sqrt{1 + 2 \frac{D_F}{D_R}}. \quad (6)$$

Die beiden Variablen  $\xi = \Psi_1 + \Psi_2$  und  $\eta = \Psi_1 - \Psi_2$  mit den korrespondierenden Eigenfrequenzen  $\omega_\xi$  und  $\omega_\eta$  beschreiben die Normalschwingungen des Pendelsystems. Man spricht in der Physik sehr häufig auch *Normalmoden* und benennt *Schwingungsmoden* besondere Schwingungszustände (so finden Sie z. B. auch die Bezeichnung „Moden“ zur Benennung unterschiedlicher stabiler Zustände des Lichtfeldes im Laser).



Die Pendel schwingen gleichsinnig, mit der Frequenz der freien Pendel:  $\omega_\xi = \omega_0$

$$(1) \quad \eta = \Psi_1 - \Psi_2 = 0; \quad \Psi_1 = \Psi_2 = \Phi_0 \cdot \cos \omega_\eta t$$



Die Pendel schwingen im Gegenteil mit gleicher Amplitude und mit der Frequenz  $\omega_\eta$

$$(2) \quad \xi = \Psi_1 + \Psi_2 = 0; \quad \Psi_1 = -\Psi_2 = \Phi_0 \cdot \cos \omega_\xi t \quad (7)$$

**Fragen:**

1. Welche Anfangsbedingungen führen auf die Gleichungen (7)?
2. Was sind Phononen?
3. Auch elektrische Schwingkreise lassen sich koppeln. Wie erfolgt die Kopplung? Skizze.

**Schwebung**

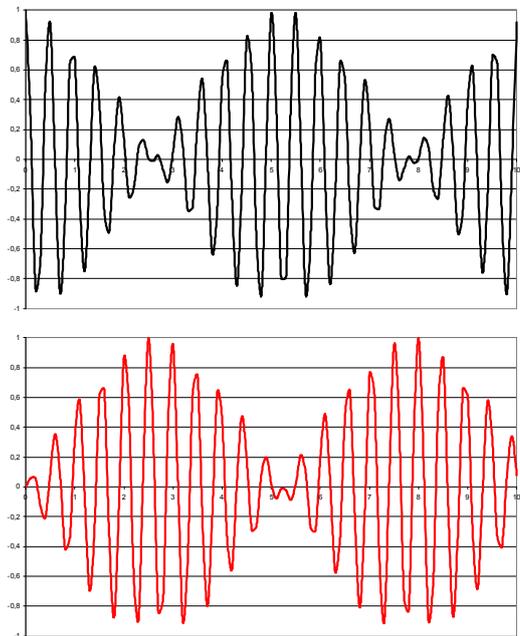
Beliebige Bewegungen der Pendel lassen sich im Prinzip durch Rücktransformation aus den Gleichungen (5) theoretisch beschreiben. Im praktischen Experiment sind sie jedoch nur schwer zu analysieren, zu komplex sind die Abläufe. Untersuchen Sie daher nichttriviale Spezialfälle, die sich durch eine spezielle Wahl der Anfangsbedingungen einstellen: Lässt man Pendel 2 in seiner Ruhelage, lenkt Pendel 1 um  $\Phi_0$  aus und überlässt dann das System sich selbst, so lassen sich gut *Schwebungen* beobachten.

Die Anfangsbedingungen  $\Psi_1 = \Phi_0; \Psi_2 = 0; \dot{\Psi}_1 = \dot{\Psi}_2 = 0$  führen auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{\Phi_0}{2} \cdot (\cos \omega_\eta t + \cos \omega_\xi t) = \Phi_0 \cos\left(\frac{\omega_\eta - \omega_\xi}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_\eta + \omega_\xi}{2} t\right) \\ \Psi_2 &= \frac{\Phi_0}{2} \cdot (\cos \omega_\eta t - \cos \omega_\xi t) = \Phi_0 \sin\left(\frac{\omega_\xi - \omega_\eta}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_\xi + \omega_\eta}{2} t\right) \end{aligned} \quad (8)$$

Im Fall schwacher Kopplung ( $D_F \ll D_R$ ) ist  $\omega_\eta \approx \omega_\xi$  und damit  $0 < \omega_\eta - \omega_\xi \ll \omega_\eta + \omega_\xi$  (s. Gl. 6). Die Terme mit der Kreisfrequenz  $(\omega_\eta - \omega_\xi)/2$  ändern sich dann nur langsam im Vergleich zu denen mit der Kreisfrequenz  $(\omega_\eta + \omega_\xi)/2$ . Eine Bewegung dieser Art wird als *Schwebung* bezeichnet (Abb. 7). Die Pendel pendeln mit der Kreisfrequenz  $\omega_p$ , ihre Amplitude variiert mit der Schwebungsfrequenz  $\omega_{Sch}$ , wobei

$$\omega_p = \frac{\omega_\eta + \omega_\xi}{2} \quad \text{und} \quad \omega_{Sch} = \frac{\omega_\eta - \omega_\xi}{2} \quad (9)$$



7 Schwebung für  $\omega_\xi = 4 \cdot \pi \text{ s}^{-1}$  und  $D_F/D_R = 0,1$  nach Gl. 8; oben ist  $\Psi_1$  dargestellt, unten  $\Psi_2$ . Die Pendelenergie „pendelt“ zwischen Pendel 1 und Pendel 2 hin und her.

## Kopplungsgrad

Unterschiedliche Kopplungsgrade lassen sich durch unterschiedliche Federn an unterschiedlichen Stellen der Pendelstange erreichen. Hier finden Sie, wie sich eine unterschiedliche Kopplung in den Bewegungsformen auswirken sollte.

Wird Pendel 1 um  $\Phi_1$  ausgelenkt, folgt Pendel 2 um  $\Phi_2$ . Man definiert den Kopplungsgrad als das Verhältnis der gekoppelten Amplituden (ist  $\Phi_2 = \Phi_1$  liegt offenbar eine starre, 100 %ige Kopplung vor).

$$\kappa_{\text{stat}} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1};$$

das ergibt für den Ruhezustand ( $M_2 = 0$ ) aus Gl. 3

$$\kappa_{\text{stat}} = \frac{D_F}{D_F + D_R} = \frac{r^2 k}{r^2 k + D_R}. \quad (10)$$

Die Kopplung bestimmt die Eigenfrequenzen; mithilfe von Gl. 6 ergibt sich die Berechnung eines dynamischen Kopplungsgrades

$$\kappa_{\text{dyn}} = \frac{D_F}{D_F + D_R} = \frac{\omega_\eta^2 - \omega_\xi^2}{\omega_\eta^2 + \omega_\xi^2}. \quad (11)$$

Umgekehrt lässt sich aus Gl. 11 ein Messverfahren ableiten, mit dem aus sich unterschiedliche Frequenzaufspaltungen  $\Delta\omega = \omega_\eta - \omega_\xi$  aus der Kopplung ergeben:

$$\frac{\omega_\eta}{\omega_\xi} = \sqrt{\frac{1 + \kappa_{\text{dyn}}}{1 - \kappa_{\text{dyn}}}} \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega_\xi} = \sqrt{\frac{1 + \kappa_{\text{dyn}}}{1 - \kappa_{\text{dyn}}}} - 1 \approx \kappa_{\text{dyn}} + \frac{1}{2}\kappa_{\text{dyn}}^2 + \frac{1}{2}\kappa_{\text{dyn}}^3 \pm \dots \quad (12)$$

## Aufgabe

Rechnen Sie die Potenzreihenentwicklung Gl. 12 für  $\kappa \ll 1$  nach.

## Messungen

### (M1) Kalibrierung der ungekoppelten Pendel

- Justieren Sie die beiden *ungekoppelten* Pendel auf gleiche Schwingungsdauer.
- Bestimmen Sie beide Schwingungsdauern  $T_0$  aus der Zeit für 20 Nulldurchgänge mit einer Stoppuhr.
- Nehmen Sie beide Pendelschwingungen mit Cassy auf und drucken Sie die Graphen aus.
- Lenken Sie das Pendel mit der Federwaage aus (s. Abb. 3; 5 verschiedene  $x$ -Werte) und messen Sie jeweils  $F$  und  $x$ . Notieren Sie auch Masse  $M$  und Durchmesser des Pendelkörpers, die Gesamtlänge des Pendels  $L$  und den Abstand der Mitte des Pendelkörpers von Ende der Stange  $L - s$ .

## Auswertung

1. Stimmen die Schwingungsdauern von Stoppuhr und Messsystem überein?
2. Bestimmen Sie aus der graphischen Darstellung  $M = M(\Phi)$  die Winkelrichtgröße  $D_R$  (Gl. 1).
3. Berechnen Sie das Trägheitsmoment  $J$  des Stangenpendels aus der Kreisfrequenz mit Gl. (2).
4. Berechnen Sie Trägheitsmoment und Kreisfrequenz des entsprechenden mathematischen Pendels.
5. Wie groß ist das Trägheitsmoment der Pendelmasse berechnet mit dem Steinerschen Satz. Vergleichen Sie diesen Wert mit den Werten aus 3. und 4.

**(M2) Normalschwingungen**

Erzeugen Sie die beiden Normalschwingungen und drucken Sie beide Graphen aus.

**Auswertung**

Bestimmen Sie die Periodendauern  $T_1$ ,  $T_2$ . Sie erwarten für die gleichsinnige Normalschwingung die gleiche Periodendauer wie für die Schwingung eines einzelnen Pendels ( $T_0$ ). Überprüfen Sie dies.

**(M3) Schwebung**

Erzeugen Sie die Schwebung mit den Anfangsbedingungen wie in Gl. 8. Um  $D_F = r^2 \cdot k$  (s. Abb. 4/5) berechnen zu können, notieren Sie die Federkonstante  $k$  (Arbeitsplatz) und messen Sie die Länge  $r$ .

**Auswertung**

1. Bestimmen Sie die Schwebungsdauer und die Schwingungsdauer aus Ihren Graphen. Berechnen Sie beide Werte auch nach Gl. 9 mit den Werten aus (M2) und vergleichen Sie die Ergebnisse.
2. Messen Sie die Zeit zwischen 2 Stillständen des einen Pendels (= halbe Schwebungsperiode =  $T_{\text{Sch}}/2$ ) und zählen Sie die Anzahl der Einzelschwingungen des anderen Pendels während dieser Zeit.

Im Lehrbuch von Demtröder finden Sie folgende Überlegung:

Im Fall  $D_F < D_R$  gilt für die halbe Schwebungsperiode näherungsweise  $T_{\text{Sch}}/2 \approx 2\pi\sqrt{J D_R / D_F^2}$ . Für  $D_F = 0,1 D_R$  wird z. B. nach 5 Schwingungen die Schwingungsenergie von einem Pendel vollständig auf das andere übertragen (vgl. Abb. 7). Wie groß ist  $D_F/D_R$  in Ihrem Versuch hier und wie gut stimmt diese Näherungsformel mit Ihren Messungen überein?

**(M4) Kopplungsgrad**

- Bestimmen Sie den Kopplungsgrad statisch nach Gl. (10) (5 Auslenkungen, Mittelwert).
- Verändern Sie die Kopplung, indem Sie die Kopplungsfeder in zwei weiteren Höhen angreifen lassen und messen Sie jeweils den statischen Kopplungsgrad (wieder wie oben) und die beiden Normalschwingungsdauern.

**Auswertung**

1. Vergleichen Sie jeweils den statischen Kopplungsgrad mit dem nach Gl. 11 berechneten Wert aus den beiden Normalschwingungsdauern.
2. Berechnen und zeichnen Sie den Funktionsverlauf für die relative Frequenzaufspaltung. Prüfen Sie, ob die Reihenentwicklung (Gl. 12) sinnvoll ist.