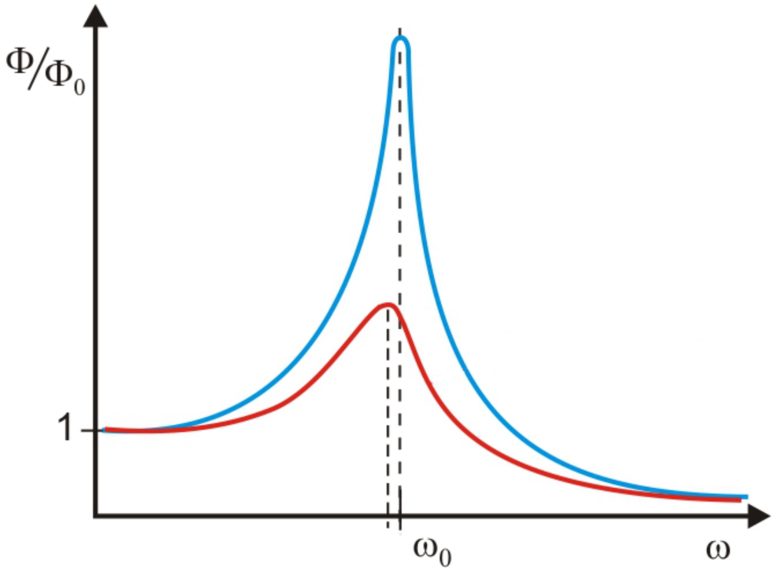
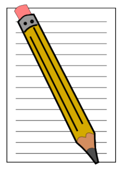


Schwingung, Resonanz, Dämpfung

In diesem Versuch untersuchen Sie Schwingungen und Resonanz mit einem Drehschwingssystem – als ein Beispiel für die unzähligen Oszillatoren, die Ihnen in fast allen Gebieten der Physik begegnen werden. In der Technik geht es oft darum, Schwingungen zu unterdrücken. Wann kommt es zur Resonanzkatastrophe und wie kann man sie vermeiden. Was bestimmt die charakteristische Klangfarbe eines Musikinstrumentes? Wie misst man die Stärke von Erdbebenwellen? Daneben lernen Sie, wie man mechanische Bewegungen elektrisch erfassen kann und wie sich Messwerte mit einem Computer auswerten und graphisch darstellen lassen.

Schriftliche VORbereitung:



- Machen Sie sich mit folgenden Begriffen vertraut:
  (I) Resonanz,
  (II) Harmonische, gedämpfte und erzwungene Schwingung:

  Amplitude, Aperiodischer Grenzfall, Periodendauer, Frequenz sowie Phase, Eigenfrequenz und Resonanzfrequenz
- Stellen Sie den zeitlichen Verlauf einer gedämpften Schwingung in einem Diagramm dar. Die Frequenz der Schwingung soll 1,5 Hz betragen, skalieren Sie die Zeitachse entsprechend.
- Zu Resonanz: Erklären Sie den Verlauf der Resonanzkurve und Phasenverschiebung (Abbildung 7) einer erzwungenen Schwingung, ohne Formeln. Betrachten Sie die Fälle $\omega \ll \omega_0$, $\omega = \omega_0$ und $\omega \gg \omega_0$.
- Gleichung (6) beschreibt die Resonanzkurve. Skizzieren Sie den Kurvenverlauf bei Variation der Parameter f_0 und γ (Qualitativ, vgl. Abbildung 7).

1 Grundlagen

Das Federpendel

Das Federpendel besteht aus einer Masse m die an eine Feder angehängt wird (vgl. Abb. 1). Die Federkraft F ist proportional und entgegengesetzt zur Auslenkung s, es ist $F = -\kappa s$. Dabei ist κ die Federkonstante. Mit $F = m{\cdot}a = m{\cdot}\ddot{s}$ ergibt sich die Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{s} = -\kappa s. \tag{1}$$

Mit dem Ansatz $\mathrm{s}(t) = A \cdot \cos(2\pi f \cdot t)$ ergibt sich eine Lösung der Bewegungsgleichung – $\mathrm{s}(t)$ beschreibt eine Schwingung mit der Frequenz f. Dabei ist A die Amplitude. Die zweite Ableitung nach der Zeit ergibt sich zu $\ddot{\mathrm{s}}(t) = -(2\pi f)^2 \cdot A \cdot \cos(2\pi f \cdot t)$. Setzt man das so gewählte $\mathrm{s}(t)$ in (1) ein, folgt

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= -\kappa s & (2)\\ \ddot{s} &= -\frac{\kappa}{m}s & (3)\\ -(2\pi f)^2 A\cos(2\pi f t) &= -\frac{\kappa}{m}A\cos(2\pi f t) & (4)\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt mittel Koeffizientenvergleich die Eigenfrequenz des Federpendels:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}. \tag{5}$$

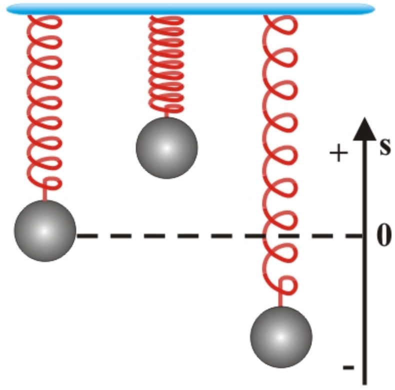


Abbildung 1: Darstellung Federpendel

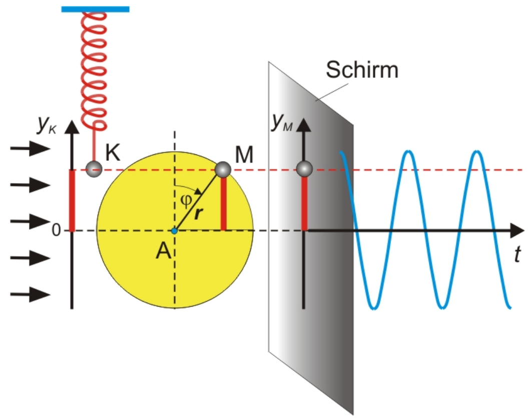


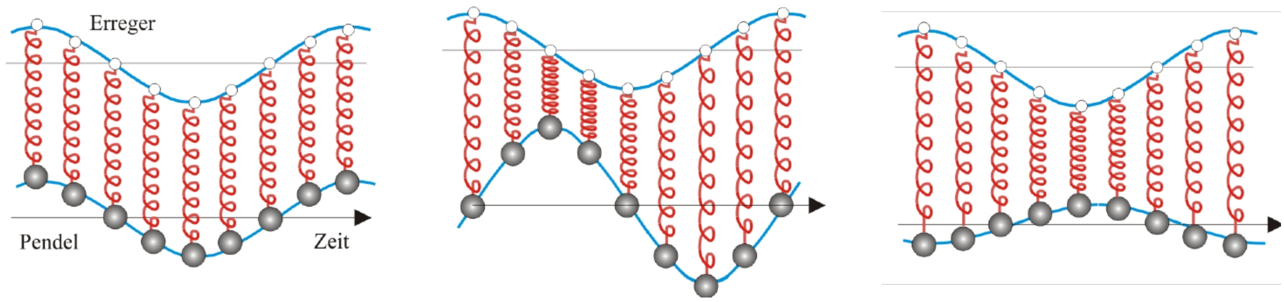
Abbildung 2: Die Marke M rotiert auf der Kreisscheibe gleichmäßig um die horizontale Achse A. Die Umlaufzeit der Scheibe wird so angepasst, dass sie mit der Schwingungsdauer T des Federpendels identisch ist.

Ein Systems schwingt mit der Eigenfrequenz, wenn es weder angeregt noch gedämpft wird. Wird also die Masse ausgelenkt und losgelassen schwingt das System mit der Eigenfrequenz. Diese hängt von der Masse m und der Federkonstante κ ab. Wie kann man die Eigenfrequenz eines Weinglases bestimmen?

Abbildung 2 beschreibt den Zusammenhang zwischen Schwingung und Kreisbewegung. Diesen Zusammenhang müssen Sie im Testat erklären können. Identifizieren Sie Phasenwinkel, Amplitude und Frequenz.

Erzwungene Schwingung, Resonanz

In den bisherigen Überlegungen haben Sie das Pendel einmal ausgelenkt und es sich anschließend selbst überlassen. Es schwingt mit seiner Eigenfrequenz. Was passiert, wenn man das Pendel nicht sich selbst überlässt, sondern von außen anregt, indem man z.B. die Aufhängung des Pendels periodisch bewegt? Bei niedrigen Erregerfrequenzen stimmen die Amplitude des schwingenden Körpers und des Erregers überein. Beide bewegen sich im Gleichtakt. Steigert man die Erregerfrequenz, so hinkt das Pendel aufgrund seiner Trägheit dem Erreger hinterher. Seine Schwingungen erfolgen phasenverschoben. Wenn die Resonanzfrequenz erreicht wird, beträgt die Phasenverschiebung $\frac{\pi}{2}$ und die Amplitude des schwingenden Körpers erreicht einen maximalen Wert, der deutlich größer als die Amplitude des Erregers ist. Bei sehr hohen Erregerfrequenzen: Erreger und Pendel bewegen sich im Gegentakt. Die Amplitude ist sehr klein – geht sogar gegen Null. Abb. 3 stellt die drei Fälle dar: Die obere Kurve beschreibt die periodische Bewegung der Pendelaufhängung, die untere Kurve beschreibt die Reaktion der Pendelmasse.



(a) Erregerfrequenz ≪ Eigenfrequenz **(b)** Erregerfrequenz = Eigenfrequenz **(c)** Erregerfrequenz ≫ Eigenfrequenz

Abbildung 3: Angeregte Schwingungen mit verschiedenen Erregerfrequenzen

Die Amplitude des Systems kann in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz beschrieben werden. Es ist

$$A(f_{\mathrm{err}}) = \frac{(2\pi f_0)^2}{\sqrt{(2\pi)^4 (f_0^2 - f_{\mathrm{err}}^2)^2 + 4\gamma^2 \cdot f_{\mathrm{err}}^2}} \cdot A_{\mathrm{err}}. \tag{6}$$

Der Verlauf der Phase ist gegeben druch:

$$\cos(\alpha) = \frac{(2\pi)^2 (f_0^2 - f_{\mathrm{err}}^2)}{\sqrt{(2\pi)^4 (f_0^2 - f_{\mathrm{err}}^2)^2 + 4 \cdot \gamma^2 \cdot f_{\mathrm{err}}^2}} \tag{7}$$

Dabei ist f_0 die Eigenfrequenz des Systems, γ die Dämpfungskonstante, f_{err} die Frequenz des Erregers und A_{err} die Erregeramplitude.

Resonanzkatastrophe

Die Tacoma-Narrows-Brücke überspannte mit einer Mittelspannweite von 853 m eine Meerenge in der Nähe der Stadt Tacoma/Washington. Am 7.11.1940 passierte es: Bei einer Windgeschwindigkeit von 60 km/h fing der Mittelteil der Brücke an zu schwingen (Frequenz = 0,6 Hz, Amplitude von 0,5 m). Zusätzlich setze eine starke Drehschwingung ein (Frequenz 0,2 Hz, Amplitude von 8,5 m). Der Wind hatte die Eigenschwingungen der Brücke angeregt. Ein gleichmäßiger Wind führte zu einer immer größeren Schwingungsamplitude – bis zur Katastrophe. Heute werden deshalb alle Hängebrücken vor ihrem Bau als Modell im Windkanal getestet.

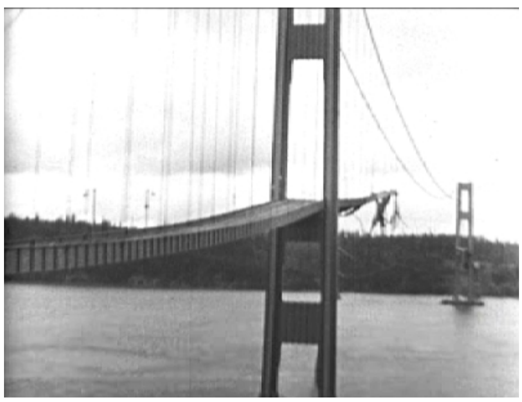


Abbildung 4: Die eingestürzte Brücke Tacoma/Washington https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tacoma_narrows_bridge_collapsed.jpg

2 Experimente

Ungedämpfte und gedämpfte Schwingung

Versuchsaufbau: Abb. 5 zeigt den Aufbau. Das Drehpendel besteht aus einer Spiralfeder S und einem flachen Kupferring K, der sich um seinen Mittelpunkt dreht. Die Auslenkung ϕ wird mit dem Messsystem alle 20 ms registriert und auf dem Bildschirm dargestellt. Das Drehpendel lässt sich mit einer Wirbelstrombremse dämpfen. Der Kupferring K rotiert dazu zwischen den Polen W eines Elektromagneten. Es bezeichnet I_W die Stromstärke mit der die Wirbelstrombremse betrieben wird. Das Pendel sieht zwar etwas anders aus als das Federpendel ist aber mathematisch strukturgleich. Für die Eigenfrequenz erhalten sie beispielsweise:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{J}} \tag{8}$$

Dabei ist D das Direktionsmoment, ein Pendant zur Federkonstante κ und J das Trägheitsmoment, welches bei Drehbewegungen ein Analogon zur Masse m ist.

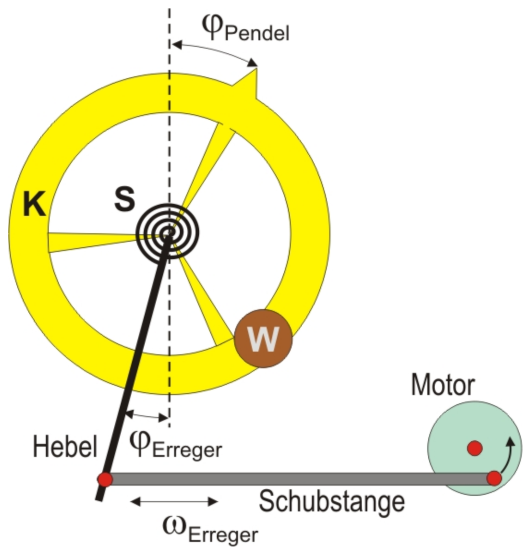


Abbildung 5: Das Pohl'sche Drehpendel

Bei der ersten Messung untersuchen Sie die Eigenfrequenz des schwingenden Systems. Einführung durch Tutor

(M1) Lenken Sie das Pendel aus und starten Sie die Messwertaufnahme. Sie erwarten eine zeitlichen Verlauf der Elongation (Auslenkung) ähnlich zu den Verläufen in Abb. 6. Drucken.

(M2) Bestimmen Sie mit Hilfe der Tabelle in der Software die Periodendauer T_0.

(A1) Bestimmen Sie die Eigenfrequenz f_0 des Systems.

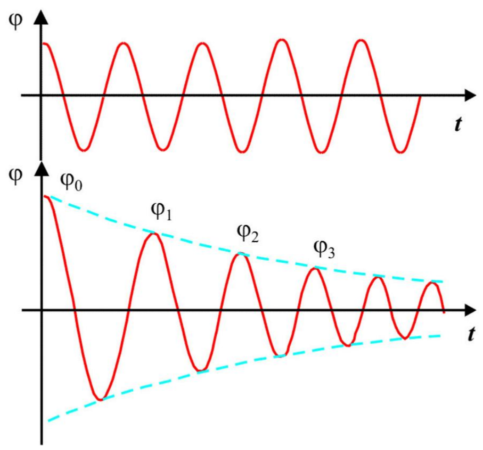


Abbildung 6: Mögliche Ergebnisse Ihrer Messungen.

Nachfolgend werden Sie den Einfluss der Dämpfung und den Aperiodischen Grenzfall untersuchen.

(M3) Wiederholen Sie die Messung bei den Stromstärken $I_w = 200\,\mathrm{mA}$ und $I_w = 1{,}5\,\mathrm{A}$. Hierdurch erhöhen Sie die Dämpfung. Jeweils drucken.

(M4) Für die Messung $I_w = 200\,\mathrm{mA}$ bestimmen Sie mit Hilfe der Tabelle in der Software sechs aufeinander folgende Amplituden $\varphi_0 \dots \varphi_5$ und die zugehörigen Zeiten.

(M5) Bei welcher Einstellung I_w stellt sich der Aperiodische Grenzfall ein? Wie lange dauert es bis das Pendel vollständig zum Stehen kommt? Drucken.

Klären Sie die folgenden Fragen anhand ihrer Messung:

(A2) Ändert sich die Schwingungsdauer T mit der Dämpfung (Messung: $I_w = 200\,\mathrm{mA}$)?

(A3) Zeigen Sie, dass die Amplitudenabnahme exponentiell erfolgt. Wie groß ist die Dämpfungskonstante für die Einstellung $I_w = 200\,\mathrm{mA}$.

Erzwungene Schwingung und Resonanz

In diesem Versuchsteil untersuchen Sie das Phänomen Resonanz. Hierbei wird analysiert, wie das schwingende System auf periodische Anregungen reagiert. Diese Anregung erfolgt in diesem Aufbau mittels eines Motors (Abb. 5) dessen Bewegung über ein Gestänge auf die Aufhängung der Spiralfeder S übertragen wird. Mit dem Messsystem können Sie die Bewegung von Pendel und Erreger gleichzeitig aufnehmen. Die Phasenverschiebung zwischen lässt sich so gut verfolgen. Die Drehzahl des Motors können Sie variieren. Hierdurch lassen sich verschiedene Erregerfrequenzen f_{err} realisieren.

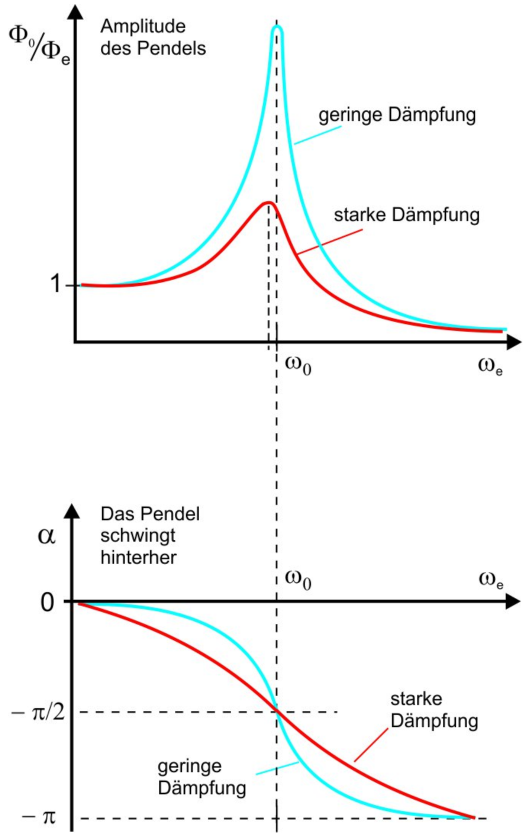


Abbildung 7: Resonanzkurve einer erzwungenen Schwingung

Versuchsdurchführung
Bei allen Messungen stellen Sie bitte eine Stromstärke von $I_w = 300\,\text{mA}$ für den Betrieb der Wirbelstrombremse ein.

(M6) Nehmen Sie bei geringstmöglicher Erregerfrequenz die zeitlichen Verläufe der Elongation von Erreger und Drehpendel auf. Die Phasenverschiebung sollte hierbei nahezu Null sein. Bestimmen Sie Frequenz und Amplitude (A_0) des Drehpendels.

(M7) Nehmen Sie sechs weitere zeitliche Verläufe der Elongation von Erreger und Drehpendel auf: Bitte führen Sie sechs Messungen durch und notieren Sie die Frequenz f_{err}, die Amplitude des Pendels ($A(f_{err})$) und die Phasendifferenz zwischen Erreger und Pendel $\alpha(f_{err})$. **Spannungen für den Motor:** ($U_A = 8\,\text{V}, 10\,\text{V}, 12\,\text{V}, 13\,\text{V}, 14\,\text{V}$ und max.V).

(M8) Finden Sie die Resonanzfrequenz des Drehpendels: Bei der Resonanzfrequenz sollte die Phasenverschiebung $-\frac{\pi}{2}$ betragen. Notieren Sie ebenfalls die Amplitude (A_{res}) und die Frequenz (f_{res}). Drucken Sie die Zeitverläufe aus.

Erstellen Sie mit Ihren Daten eine Resonanzkurve:

(A4) Normieren Sie Ihre Amplituden auf die erste Messung ($\frac{A_i}{A_0}$, für $i = 0, \ldots, 6$)

(A5) Tragen Sie die normierten Amplituden gegen die zugehörigen Frequenzen auf. Es sollte sich ein Verlauf wie in Abbildung 7 ergeben.

(A6) Fitten Sie den Amplitudenverlauf mit der Gleichung (6):

$$A(x) = \frac{B \cdot (f_0)^2}{\sqrt{(f_0^2 - x^2)^2 + A \cdot x^2}} \tag{9}$$

(A7) Vergleichen Sie die Resonanzfrequenz aus dem Fit mit der gemessenen Eigenfrequenz und der im Experiment bestimmten Resonanzfrequenz.

(A8) Bestimmen Sie die Phasenverschiebung in Abhängigkeit zur Erregerfrequenz und fitten Sie diese mit Gleichung (7).